

د. مجيد الكرخي

التحليل الكمي الاقتصادي

3

العلاقات غير الخطية - التكامل



بسم الله الرحمن الرحيم

التحليل الكمي

الاقتصادي

الجزء الثالث

العلاقات غير الخطية - التكامل

جميع الحقوق محفوظة

الطبعة الأولى

١٤٣٤هـ - ٢٠١٤م

All Rights Reserved



دار المناهج للنشر والتوزيع

عمان، شارع الملك حسين، بناية الشركة المتحدة للتأمين

هاتف 465 0624 فاكس 465 0664 +9626 6

ص.ب 215308 عمان 11122 الأردن

Dar Al-Manahej

Publishers & Distributor

Amman-King Hussein St.

Tel 4650624 fax +9626 4650664

P.O.Box: 215308 Amman 11122 Jordan

www.daralmanahej.com

info@daralmanahej.com

manahej9@hotmail.com

جميع الحقوق محفوظة

قوله لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات أو نقله أو استنساخه بأي شكل من الأشكال دون إذن خطي مسبق من الناشر، كما أقر مجلس الإفتاء الأردني بكتابته رقم ٢٠٠١/٣ بتحريم نسخ الكتب وبيعها دون إذن المؤلف والناشر.

التحليل الكمي الاقتصادي

الجزء الثالث
العلاقات غير الخطية - التكامل

تأليف
د. مجيد الكرخي



المحتويات

مقدمة 9

الفصل الأول

التكامل

1-1 تعريف	15
1-2 التكامل غير محدد	15
1-3 قواعد التكامل	17
1-4 المساحة تحت المنحنى	22
1-5 التكامل المحدد	25
1-6 المساحة السالبة	29
1-7 المساحة ما بين منحنين	31
1-8 الصيغ الأساسية للتكامل	33
1-9 التكامل بالأجزاء	43
1-10 التكامل المضاعف	47

المحتويات
والمقدمة

الفصل الثاني

التكامل وتطبيقاته الاقتصادية

2-1 المقدمة	55
2-2 التكاليف	55
2-3 العائدات	57

2-4	التكاليف والعائدات والأرباح الحدية.....	61
2-5	الاندثار.....	72
2-6	الدخل القومي والاستهلاك والإدخال.....	74
2-7	فائض المستهلك.....	77
2-8	فائض المنتج.....	87
2-9	القيمة الحالية.....	93
2-10	قانون بارينو في توزيع الدخل.....	98

الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية

3-1	المقدمة.....	107
3-2	تعريف.....	107
3-3	حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية.....	110
3-4	حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى والدرجة الثانية.....	112

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية وبعض التطبيقات الاقتصادية

4-1	مقدمة.....	149
4-2	نموذج النمو المبسط لدومار.....	152
4-3	نموذج دومار في الاقتصاد الكلي.....	154
4-4	نموذج دومار في الدين الوطني.....	157
4-5	نموذج السعر المعدل.....	159
4-6	نموذج الدخل - الاستهلاك - الاستثمار.....	164

الفصل الخامس

معادلات الفروق

171	5-1 مقدمة	
172	5-2 تعريف معادلات الفروق	
174	5-3 معادلات الفروق الخطية	
176	5-4 حل معادلات الفروق	
179	5-5 معادلة الفروق الخطية من المرتبة الاولى ذات المعادلات الثابتة	
188	5-6 سلوك متتابعة حل معادلة الفروق	
196	5-7 التوازن والاستقرار	
198	5-8 معادلات الفروق الخطية من المرتبة الثانية ذات المعادلات الثابتة	
207	5-9 المسار الزمني لحل معادلة الفروق الخطية من المرتبة الثانية	المحتويات
212	5-10 معادلات الفروق غير المتجانسة من المرتبة الثانية	والمقدمة
218	5-11 الاعداد المركبة	

الفصل السادس

معادلات الفروق والنماذج الاقتصادية

229	6-1 مقدمة
229	6-2 نموذج العنكبوت
232	6-3 نموذج هارور
234	6-4 نموذج الاستهلاك
236	6-5 نموذج الدخل، الاستهلاك، الاستثمار
238	6-6 نموذج منزل في المخزون

6-7 نموذج ساملسن في تفاعل المضاعف والمعجل 242

الفصل السابع

البرمجة غير الخطية

7-1 المقدمة 251

7-2 أنواع البرمجة غير الخطية 251

7-3 حل البرامج غير الخطية 252

7-4 حل البرامج غير الخطية غير المقيدة 253

7-5 حل البرامج غير الخطية المقيدة 262

7-6 البرامج التربيعية 267

المصادر 283

مقدمة

تقدم التحليلات الكمية لمجمل الظواهر الاقتصادية وصفا دقيقا للمشكلة إذا ما أحكمت متطلباتها ابتداءً من مضبوطة البيانات المستخدمة وصولاً إلى حسن الأسلوب التحليلي ومن ثم مدى قدرة متخذ القرارات في توظيف الاستنتاجات المستخلصة .

لقد برزت أهمية التحليلات الكمية في علم الاقتصاد منذ بضعة قرون ولكنها تبلورت وتعمقت خلال القرن الماضي وخاصة الرياضية والإحصائية منها ولهذا صار من الضروري على دارسي علم الاقتصاد والمهتمين بالشؤون الاقتصادية إيلاء التحليلات الكمية المذكورة اهتماماً خاصاً حيث لم تعد المقالات الوصفية البحتة التي تقوم على سرد غير موثق بالمعلومات والوسائل الكمية قادرة على الإحاطة بطبيعة الظاهرة وعناصرها وقوانين حركتها المحتويات والمقدمة

تمهيدا لمعرفة اتجاهاتها والمؤثرات التي تتحكم بها.

وقد حاولنا في هذا الكتاب أن نقدم شيئا من التحليلات الكمية الاقتصادية بأسلوبها الرياضي المبسط ومن هنا جاءت تسمية الكتاب (بالتحليل الكمي الاقتصادي) تلك التسمية التي اشتقت من (الكم ولكمية) والتي تعني كما يفهمها القارئ الكريم استخدام الشروح الكمية (الرياضية) للعلاقات والتشابهات الاقتصادية سواء ما يتعلق بها بالاقتصاد الكلي أو الاقتصاد الجزئي .. ولم تكن أمامنا فرصة التوسع الكثير في هذا المجال لان الوسيلة والغاية كانتا متلازمتين عند دراسة موضوع كهذا فلم نتمكن الدخول إلى التكميم مباشرة بسبب الحاجة لاستكمال جوانب من

المعرفة الرياضية لدى البعض من الإداريين والباحثين المبتدئين كما لم يتمكن من الأطناب في شرح التحليلات الرياضية البحثية خوفاً من تحول الموضوع إلى كتاب في الرياضيات ولهذا سعينا التوفيق بين الحاجتين والموازنة بينهما واعتمدنا أسلوباً نتمنى أن يرضى القارئ وذلك باستعراض التحليل الرياضي أولاً ومن ثم عرض التطبيقات الاقتصادية الكمية بعدئذ أي قدمنا الوسيلة الرياضية كي تكون مفهومة عند استخدامها في التكميم الاقتصادي اللاحق.

وقد حرصنا على أن تكون التحليلات الرياضية متدرجة فبدأنا بالمبادئ الأولية والعلاقات الخطية والتي شملت الدول الخطية والمصفوفات وجداول المستخدم المنتج والبرمجة الخطية والتي احتواها الجزء الأول من الكتاب أما العلاقات غير الخطية والتي شملت الدول غير الخطية ومبادئ التفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية ومعادلات الفروق فقد وضعت في الجزء الثاني.

والنقطة الأخرى التي راعيناها هي الابتعاد عن التحليلات الرياضية المعقدة والاتجاه نحو التبسيط والاستعانة بالشروح التوضيحية الضرورية لخلق حالة الفهم التي يريها القارئ الذي لم يسبق له دراسة الرياضيات العامة كما لجأنا في سبيل تحقيق ذلك إلى مزيد من الأمثلة التي نراها الوسيلة الأكثر فائدة في تحقيق حالة الفهم المذكورة فهي إحدى وسائل التعلم عن طريق العمل التي أثبتت جدواها في المجالات التعليمية.

وبعد كل فصل رياضي عرضنا بعض القضايا الاقتصادية الأكثر شيوعاً مستعينين في عرضها بالتحليلات الرياضية التي سبقتها وهكذا تصاعدت عملية العرض والتحليل فبدأنا بالعلاقات الاقتصادية البسيطة التي يمكن أن تشكل دالة خطية وبيننا كيفية تمثيلها بالرسم البياني ومن ثم حلها رياضياً وصولاً لتحديد الكميات الاقتصادية من

عرض وطلب وتكاليف وإنتاج واستهلاك وصادرات واستيراد ونقاط تعادل وغيرها . ثم انتقلنا بعدئذ إلى الدول الاقتصادية غير الخطية أو ما يسمى بالمنحنيات وهي الصورة الأخرى للدول الاقتصادية الخطية ومن ثم تعرضنا للتفاضل والتكامل وتطبيقاتهما في التحليلات الكمية الاقتصادية ذات العلاقة بالاقتصاد الكلي أو في نماذج النمو الاقتصادي وغيرها ، كذلك الحال بالنسبة لمعادلات الفروق التي استخدمت في عرض بعض النماذج الرياضية أيضا. أما المصفوفات الجبرية فقد استخدمت في تحليلات المستخدم - المنتج واستعمالاته في عرض التشابك الاقتصادي والتنبؤ في المتغيرات الاقتصادية الكلية في حسابات الدخل القومي كذلك استخدمت المصفوفات في شرح البرمجة الخطية وحلولها واستخداماتها الاقتصادية .

ونحن إذ تغمرنا السعادة في تقديمنا شيئا متواضعا في مجال الاقتصاد الكمي نشعر في المحتويات نفس الوقت بأن هناك مجالات رحبة كثيرة في هذا الموضوع لم يسعفنا الحظ في التطرق إليها كما نلتمس العذر عن أي سهو أو خطأ حدث دون أن نلتفت إليه تاركين للقارئ اللبيب أمر تصحيحه وكم نكون ممتنين لو نبهنا عنه لا مكان تلافيه في الطبعة اللاحقة . شاكرين الله سبحانه وتعالى الذي وفقنا على وضع هذا الكتاب فله الفضل كله وبه نستعين .

المؤلف

الفصل الأول

التكامل

Integration

التكامل

Integration

تعريف

1-1

يعرف التكامل بأنه العمليات المعاكسة للتفاضل أي إيجاد دالة يكون معدل تغيرها معلوماً ، كما أنه يعرف بالطريقة التي تحدد المساحة تحت المنحنى.

ولما كان التكامل عكس التفاضل فإن تكامل أي دالة تفاضلية هو الدالة الأصلية ما عدا المقدار الثابت. ومن ذلك يمكن القول بأن التكامل هو الأسلوب الذي نجد بواسطته الدالة عندما تكون مشتقتها معلومة.

ومن جهة أخرى فإن التكامل هو حساب القيمة النهائية لمجموعة الحدود (المقادير) حين يزداد عدد هذه الحدود إلى ما لانهاية وعندما تكتب القيمة لكل حد من الصفر. أي أن التكامل هو كيفية إيجاد المساحة تحت المنحنى. وقد استخدم الرياضيون الأوائل الرمز (S) للإشارة إلى عمليات التكامل وكما هو واضح أن هذا الرمز مشتق من كلمة مجموع (sum) أي مجموعة الحدود التي ما لانهاية لها المذكورة أعلاه.

التكامل غير محدد Indefinite Integration

1-2

إذا كانت (x) هي تكامل الدالة f (x) بالنسبة إلى x فإن العلاقة بينهما يمكن وضعها بالصورة التالية:-

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (1-1)$$

حيث يقرأ الطرف الأيسر: تكامل دالة x بالنسبة x أما c فهو العدد الثابت من عملية التكامل. في حين يسمى المقدار $F(x) + c$ بالتكامل غير المحدد وسبب ذلك أن مشتقة الحد الثابت هي صفر ولا تعرف قيمة هذا الحد حين إجراء تكامل مشتقة معينة فقد تأخذ (C) أية قيمة ولهذا سمي بالتكامل غير المحدد.

ومن ذلك نستدل على أنه: إذا كانت $F(x)$ تكامل الدالة $f(x)$ فإن كل تكاملات $f(x)$ تقع ضمن المجموعة $F(x) + c$ حيث أن c أي مقدار ثابت. ولهذا تعطي في كثير من تطبيقات التكامل معلومات في أصل المسألة تحدد قيمة المقدار الثابت وتسمى: (الشرط الابتدائي: Initial Condition). ولتوضيح ذلك نأخذ المثال الآتي:-

ما هو تكامل مشتقة الدالة x الآتية: $f(x) = 2x - 2$

الجواب:

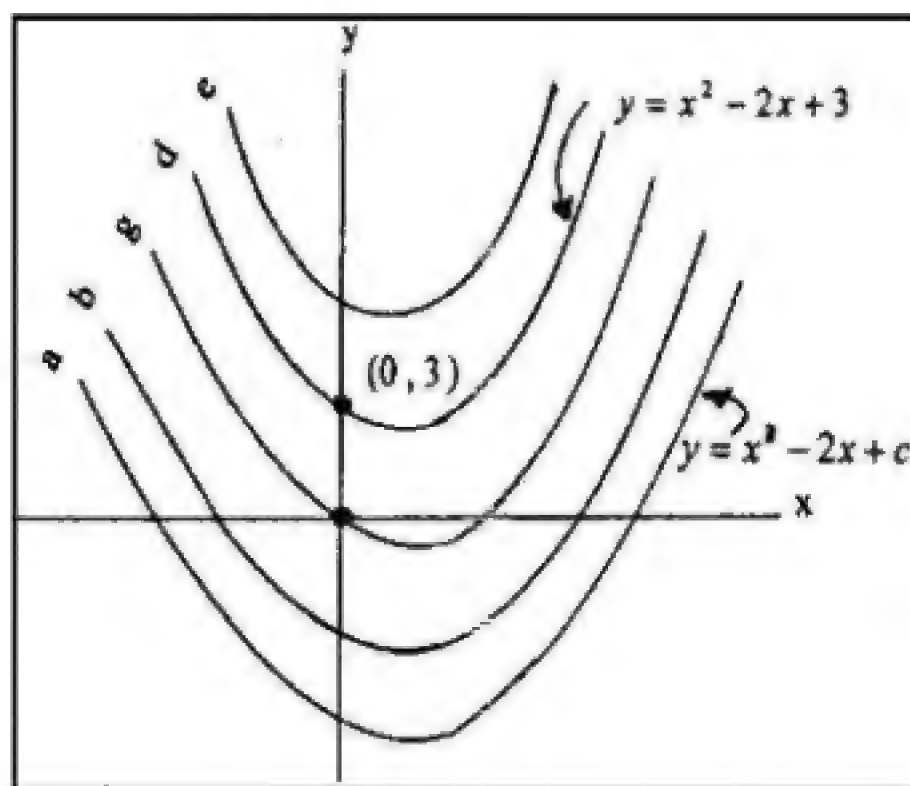
يستخرج تكامل هذه الدالة عن طريق عكس عمليات التفاضل كالآتي:

$$\begin{aligned} & \int (2x - 2) dx \\ &= \int 2x dx - \int 2 dx \\ &= x^2 - 2x + c \end{aligned}$$

وبلاحظ لأجل التدقيق بأن:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 2x + c) = 2x - 2$$

وحيث أن c تأخذ قيمة غير محددة لذا يمكن تمثيل الدالة $y = x^2 - 2x + c$ مجموعة من المنحنيات ذات القطع المتكافئ يختلف كل منحنى عن الآخر باختلاف قيمة c . كما يظهر في الشكل (1-1) أدناه:-



شكل رقم (1-1)

الفصل

وبلاحظ بأن النقطة (0,3) تمثل بالمنحنى (d) حيث الدالة $y = x^2 - 2x + 3$ وفيها $y = 3$ الأول
عندما تكون $x = 0$, $c = 3$ وهكذا بالنسبة لبقية المنحنيات في العائلة حيث أن كل منحنى فيه c تساوي
قيمة معينة عندما $x = 0$ ففي المنحنى g يظهر أن $y = 0$ عندما $x = 0, c = 0$.

والمنحنى (a) تكون فيه $y = -5$ عندما $x = 0, c = -5$ أي معادلة المنحنى (a) هي :

$$y = x^2 - 2x - 5$$

وهكذا بالنسبة لبقية المنحنيات .

قواعد التكامل

1-3

إن قواعد التكامل ما هي إلا معكوس قواعد التفاضل والتي نتناول بعضها في هذه الفقرة على أن

نأتي على البعض الآخر في الفقرات اللاحقة :

$$\int dx = x + c \quad -1$$

$$\int c dx = c \int dx \quad -2$$

$$\int (du + dv) = \int du + \int dv \quad -3$$

حيث أن $u = f(x), v = g(x)$ وهي دوال تفاضلية بالنسبة للمتغير x .

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1) \quad -4$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1) \quad -5$$

حيث أن $u = f(x)$ وهي دالة تفاضلية بالنسبة للمتغير x .

$$\int \frac{1}{u} du = \ln u + c \quad -6$$

وفي حالة كون $x = u$ فإن $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

أمثلة

$$\begin{aligned} \int (3x^2 + 2) dx &= \frac{3x^{2+1}}{2+1} + 2x + c \quad -1 \\ &= x^3 + 2x + c \end{aligned}$$

إن هذا المثال يوضح لنا تطبيق القواعد (1,2,3,4).

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c \quad -2$$

$$\int (2x^3 + 3)^2 x^2 dx \quad -3$$

نفرض أن $u = 2x^3 + 3$ وأن $du = 6x^2 dx$

وبذلك يكون لدينا: $\frac{1}{6} du = x^2 dx$

$$\int (2x^3 + 3)^2 x^2 dx = \int u^2 \left(\frac{1}{6} \right) du \quad \text{(القاعدة 5)}$$

$$\frac{1}{6} \int u^2 du = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \right) u^3 + c \quad \text{(القواعد (4,2,1))}$$

$$= \frac{1}{18} (2x^3 + 3)^3 + c$$

$$= \frac{(2x^3 + 3)^3}{18} + c$$

$$\int 5x dx = 5 \int x dx = 5 \left(\frac{1}{2} x^2 + c \right) \quad \text{(القاعدة 2)} \quad 4$$

$$\int \frac{1}{x+2} dx \quad 5$$

نفرض أن: $u = x + 2$

$$\therefore du = dx$$

$$\therefore \int \frac{1}{x+2} dx = \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln u + c$$

$$= \ln(x + 2) + c \quad \text{(القاعدة 6)}$$

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad 6 \quad \text{(نستخدم القاعدة 3)}$$

الفصل

الأول

(القاعدة 3)

$$\int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c$$

$$\int (2x+3)dx \quad -7$$

$$(القاعدة 3) = \frac{2x^{1+1}}{1+1} + 3x + c$$

$$= x^2 + 3x + c$$

$$u = 2 + 5x : \text{ نفرض أن } \int \sqrt{2+5x} dx \quad -8$$

$$\therefore \frac{1}{5} du = dx \quad du = 5dx \quad \text{و}$$

والآن :

$$(القاعدة 5,2) \int (2+5x)^{\frac{1}{2}} dx = \int u^{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \left(\frac{1}{5} \right) \frac{2}{3} (2+5x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{15} (2+5x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(x+2) \quad -9 \quad \text{جد معادلة المنحنى ذو الانحدار}$$

والذي يمر من النقطة (2,4) .

الجواب :

$$\begin{aligned} & \int (x+1)(x+2) dx \\ &= \int (x^2 + 3x + 2) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c \end{aligned}$$

(القاعدة 3)

أما المنحنى y الذي يمر بالنقطة $(2,4)$ فإن النقطة تشير إلى أن:
 $x = 2, y = 4$ وبالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على :

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{3}{2}(2)^2 + 2(2) + c \\ 4 &= \frac{8}{3} + \frac{12}{2} + 4 + c \\ \therefore c &= -\frac{26}{3} \end{aligned}$$

الفصل

الأول

إذن معادلة المنحنى التي تمر بالنقطة $(2,4)$ هي :-

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{26}{3} = \text{المنحنى}$$

تمارين (1-1)

قدر قيمة التكاملات الآتية :

$$\int x^2 dx \quad -1$$

$$\int (x+2)(x-1) dx \quad -2$$

$$\int x^{-3} dx \quad -3$$

$$\int \frac{6}{x} - 1 dx \quad 4$$

$$\int (4 - 2x^2)^2 dx \quad 5$$

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2} dx \quad 6$$

$$\int (x-3) dx \quad 7$$

$$\int (2x^3 - x^2 + 4x - 10) dx \quad 8$$

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx \quad 9$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} dx \quad 10$$

المساحة تحت المنحنى Area Under the Curve

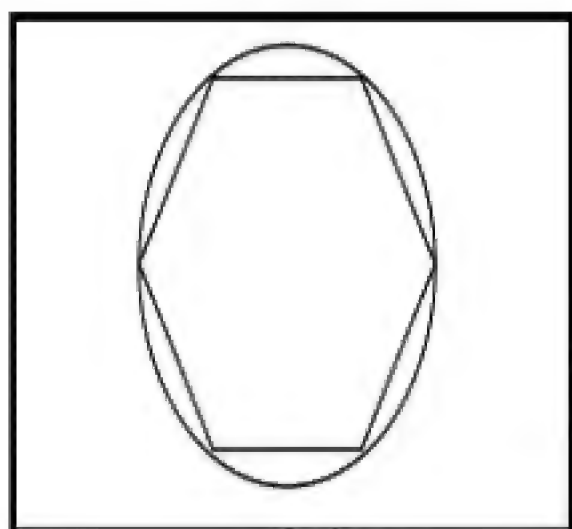
1-4

الجزء الثالث

لقد كانت قضية حساب مساحة الأشكال الهندسية إحدى الأسباب التي أدت إلى تطور حساب التكامل. ففي مبادئ الهندسة تحسب مساحة المستطيل بحاصل ضرب بعديه (الطول \times العرض) ومساحة المربع بتربيع ضلعه ومساحة الدائرة بحاصل ضرب مربع نصف قطرها \times النسبة الثابتة π ، وكذلك الحال بالنسبة للأشكال الهندسية الأخرى المحددة بقطع من الخط المستقيم. ولكن كيف الحال إذا كان البحث يدور حول إيجاد مساحة الأشكال المحددة بمنحنيات وليس بخطوط مستقيمة.

لقد استفاد الرياضيون من مفهوم النهايات لمعالجة صعوبة إيجاد المساحة تحت المنحنى وقد بدأوا بضرب المثلث الآتي :

بافتراض وجود مضلع منتظم (regular polygon) مرسوم داخل الدائرة يراد إيجاد مساحته كما في الشكل رقم (1-2).



شكل رقم (1-2)

إن مساحة هذا المضلع تقارب مساحة الدائرة ولكنها أصغر من مساحة الدائرة بسبب وجود مساحات من الدائرة لم يغطها المضلع ولكن كلما زادت أضلاع المضلع اقتربت مساحته من مساحة الدائرة.

فإذا رمزنا لمساحة الدائرة بالحرف (A) و مساحة المضلع الذي يتكون من (n) من الأضلاع بالرمز

الفصل

$a(n)$ فإن :-

$$a(n) \rightarrow A \text{ as } n \rightarrow \infty$$

الأول

أي كلما زاد عدد أضلاع المضلع كلما اقتربت مساحته شيئاً فشيئاً من مساحة الدائرة.

والآن دعنا نستخدم مفهوم النهاية في هذا المثال لأجل الوصول إلى تفسير التكامل المحدد كونه

المساحة تحت المنحنى. فإذا كانت لدينا قضية إيجاد مساحة محددة بمنحنى موجب مستمر وهو المنحنى

$y = f(x)$ ويحدود أخرى هي : الإحداثي x والخطين العمودين $(x = a, x = b)$. فكيف تحسب

هذه المساحة؟

لنتنظر إلى الشكل رقم (1-3) ونتابع الموضوع :

يتم حساب هذه المساحة بتقسيم القاعدة (a, b) إلى (n) من المساحات ونرمز إلى نقاط التقسيم

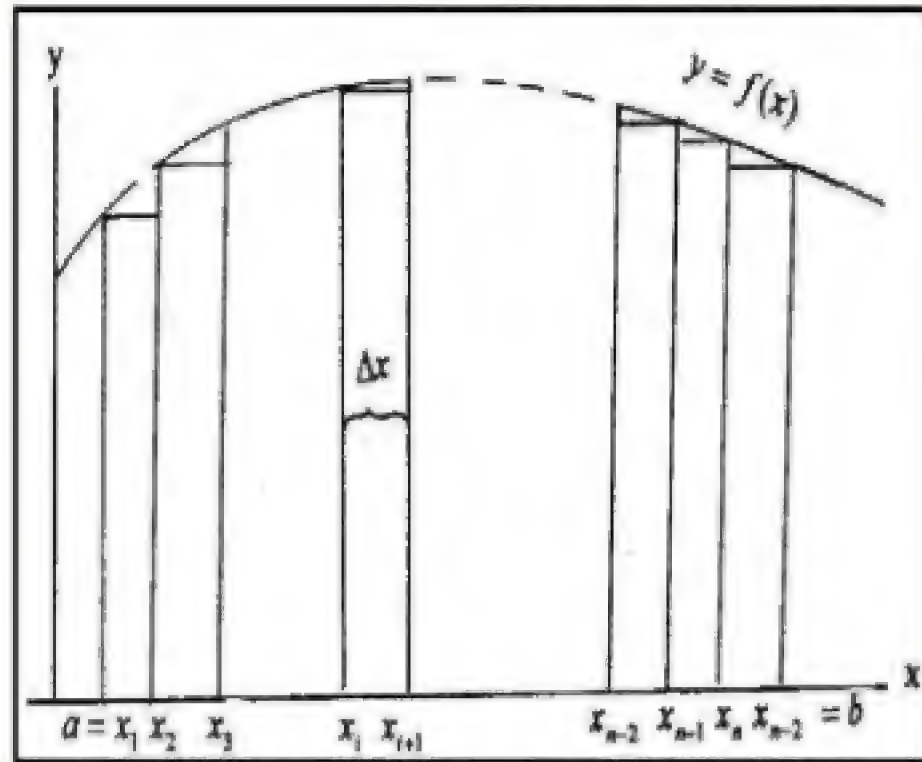
بالرموز:

$$a = x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = b$$

المنحنى y وبذلك تكون مساحة كل مستطيل تحت المنحنى كما يلي :-

$$f(x_1)\Delta x_1, f(x_2)\Delta x_2, \dots, f(x_n)\Delta x_n$$

$$(1-2) \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i \text{ : وإن مجموع هذه المساحات}$$



والآن إذا زدنا عدد المستطيلات بزيادة (n) إلى ما لا نهاية أي $(n \rightarrow \infty)$ فهذا يؤدي إلى زيادة

عدد Δx بحيث تدنو مسافة (عرض) كل واحد منها من الصفر وبذلك فإن المساحة تحت المنحنى والمحصورة ما بين (a, b) والتي لم تغطيها المستطيلات سابقاً سوف تنخفض بل أنها تقترب من الصفر وبهذا نستنتج :

إن المساحة (A) المحددة بدالة موجبة مستمرة $y = f(x)$ و الإحداثي x وإحداثيين ثابتين :

$x = a, x = b$ تحسب بالصيغة التالية :

$$(1-3) \quad A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$$

وإن $f(x)$ تسمى دالة تكاملية للمسافة (a, b) ويمكن توضيحها بالآتي :-

$$A = Area = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x) dx \quad (1-4)$$

وتقرأ تكامل من a إلى b للدالة $f(x)dx$ وتسمى هذه العملية بعملية التكامل بين نهايتين (a) النهاية الدنيا و (b) النهاية العليا.

1-5 التكامل المحدد Definite Integration

يلاحظ عند الحساب $\int_a^b f(x) dx$ لم يظهر الحد الثابت (c) لأن التكامل أصبحت له قيمة محددة

أي بين النهايتين (a, b) وبسبب ذلك سمي بالتكامل المحدد (Definite integral) للدالة $f(x)$ من a إلى b . وجبرياً يتم التخلص من الثابت (c) نتيجة طرح الحد الأدنى للدالة (a) من الحد الأعلى لها (b) فإذا كان تكامل $g(x)$ هو :

$$\int g(x) dx = f(x) + c$$

فحينما تكون $x = b$ فإن قيمة التكامل تكون $f(b) + c$. وحينما تكون قيمة $x = a$ فإن قيمة التكامل تكون $f(a) + c$ وبالطرح ينتج :

$$\begin{aligned} & [f(b) + c] - [f(a) + c] \\ (1-5) \quad & = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

(وهكذا فقد تلاشى الثابت c)

ويرمز للصيغة المذكورة في (1-4) أعلاه بالآتي :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(x) dx$$

ويكتب ناتج التكامل كالآتي :-

$$(1-6) \quad f(x) \Big|_a^b$$

وستعتمد الخط القائم (|) بدلاً من (]) في الإشارة إلى ذلك .

وللتكامل المحدد الخصائص الآتية :-

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad -1$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad -2$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad -3$$

حيث أن : $b \geq c \geq a$

لنأخذ بعض الأمثلة:

أمثلة

جد قيمة المساحة تحت المنحنى في المسافة المحددة في كل من المسائل التالية :-

-1

$$\begin{aligned} \int_0^{10} f(x)dx &= \int_0^{10} xdx \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^{10} \\ &= \frac{(10)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \\ &= 50 \end{aligned}$$

$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 \quad -2$$

$$= \frac{(3)^3}{3} - \frac{(2)^3}{3}$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{19}{3}$$

$$\int_1^{25} x^{\frac{-1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^{25} \quad -3$$

$$= 2(25)^{\frac{1}{2}} - 2(1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 10 - 2$$

$$= 8$$

الفصل

الأول

$$\int_2^4 6x dx = 6 \frac{x^2}{2} \Big|_2^4 \quad -4$$

$$= 3x^2 \Big|_2^4$$

$$= 3(4)^2 - 3(2)^2$$

$$= 36$$

$$\int_{-1}^1 (1+x+10x^4) dx = x + \frac{x^2}{2} + 10 \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 \quad -5$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + 2x^5 \Big|_{-1}^1$$

$$= \left[(1) + \frac{1}{2}(1)^2 + 2(1)^3 \right] - \left[(-1) + \frac{1}{2}(-1)^2 + 2(-1)^3 \right]$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2} + 2 \right] - \left[-1 + \frac{1}{2} - 2 \right]$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 6$$

$$\int_1^4 x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} dx = \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_1^4 \quad -6$$

$$= \left. \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right|_1^4$$

$$= \left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + 2(4)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} + 2(1)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{28}{3} - \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

ويمكن استخدام الخاصية (3) في الحل وبعد تكيف المقدار وكما يأتي :

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right]_2^4$$

$$= \left[\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} + 2(2)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[\frac{2}{3} + 2 \right] + \left[\frac{28}{3} \right] - \left[\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} + 2(2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

قيمة الحد الثالث ماخوذه من أعلاه ويحذف الحد الأول مقابل الحد الرابع ينتج:-

$$\frac{28}{3} - \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

(وهي نفس النتيجة)

$$\int_1^5 x(x^2 - 4)^2 dx \quad -7$$

نفرض أن :

$$u = x^2 - 4 \quad , \quad du = 2x dx$$

$$\therefore \frac{1}{2} du = x dx$$

$$\therefore \int_1^5 x(x^2 - 4)^2 dx = \int_1^5 u^2 \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} \Big|_1^5$$

$$= \frac{(x^2 - 4)^3}{6} \Big|_1^5 = \frac{(5^2 - 4)^3}{6} - \frac{(1^2 - 4)^3}{6}$$

$$= \frac{9261}{6} - \left(\frac{-27}{6} \right)$$

$$= \frac{9288}{6} = 1548$$

الفصل

الأول

وحسب الخاصية رقم (1) فإن :

$$\int_1^5 x^2 (x - 4)^2 dx = - \int_5^1 x(x^2 - 4)^2 dx$$

$$(من الناتج أعلاه) = - \left(-\frac{27}{6} - \frac{9261}{6} \right)$$

$1548 =$ وهي نفس النتيجة.

Negative Area المساحة السالبة

1-6

لدى عرض مفهوم التكامل كما في (1-4) :

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

فقد افترضنا أن الدالة $f(x)$ مستمرة موجبة ما بين (a, b) أما إذا كانت $f(x)$ سالبة أي أن المنحنى $y = f(x)$ يقع تحت الإحداثي x ما بين (a, b) فتصبح قيمة التكامل سالبة لكون المساحة تحت المحور x هي مساحة سالبة أما القيمة المطلقة للمساحة المحصورة بين المنحنى والمحور x والعمودين (a, b) فتحسب بالصيغة التالية :

$$\text{Total Area} = \sum (\text{positive Area}) - \sum (\text{Negative Areas})$$

$$A = \sum A^+ - A^-$$

أي أن المساحة الكلية ما هي إلا القيمة المطلقة للتكامل ولهذا فهي دائما ذات قيمة موجبة .

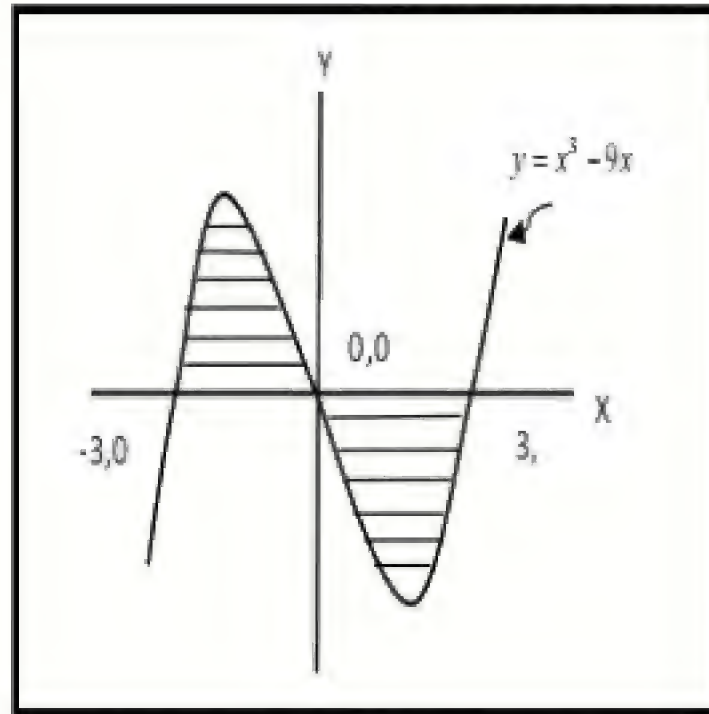
مثال (1) :

احسب المساحة المحددة بالمنحنى الآتي والمحور x :

$$y = x^3 - 9x$$

الجواب :

عند رسم المنحنى $f(x)$ يظهر كما في الشكل (1-4)



شكل رقم (1-4)

وبلاحظ أن المساحة محصورة بين المحور x و $x = 3, x = -3$ كما يمكن معرفة قيمة x بدون

اللجوء إلى الرسم وذلك عندما $y=0$ فإن :

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x-3)(x+3) = 0$$

$$x = -3 \quad \text{أو} \quad x = 3$$

إذن المساحة الكلية تساوي :

$$A = \sum A^+ - \sum A^-$$

$$A = \int_{-3}^0 (X^3 - 9X) dx - \int_0^3 (X^3 - 9X) dx$$

$$= \left(\frac{X^4}{4} - \frac{9X^2}{2} \right) \Big|_{-3}^0 - \left(\frac{X^4}{4} - \frac{9X^2}{2} \right) \Big|_0^3$$

$$= \left[(0) - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) \right] - \left[\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) - (0) \right]$$

$$= \frac{81}{4} - \left(-\frac{81}{4} \right) = \frac{81}{2}$$

الفصل

الأول

المساحة ما بين منحنين Area Between Two Curves

1-7

كثيراً ما تكون هناك حاجة لحساب قيمة المساحة بين المنحنين:

$y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ وبين العمودين $x=a$, $x=b$ بشرط أن :

$$f(x) \leq g(x)$$

أي أن المنحنى $f(x)$ يقع تحت المنحنى $g(x)$ كما أن : $a \leq x \leq b$

حيث يجري حساب المساحة كالآتي:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

مثال:

أوجد المساحة المحددة بالمنحنين : $y = x - x^2$, $y = -x$

الحل:

نجد أولاً نقاط تقاطع المنحنيين :

$$x - x^2 = -x \quad \text{لدينا}$$

$$\therefore x - x^2 + x = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

$$x = 2 \quad \text{أو} \quad x = 0 \quad \text{لما}$$

فإذا كانت $x = 0$ فإن $y = 0$

وإذا كانت $x = 2$ فإن $y = -2$

لذلك فإن :

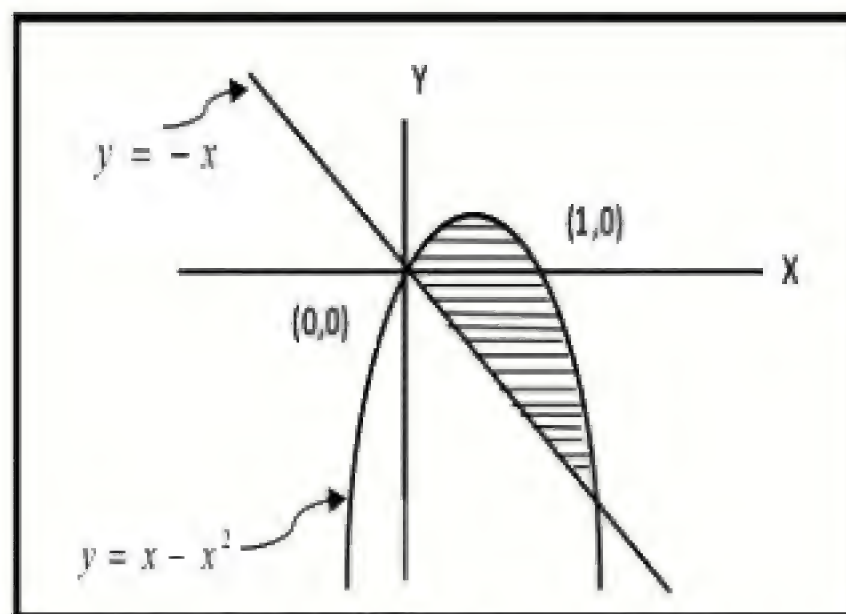
$$A = \int_0^2 [x - x^2 - (-x)] dx$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2) dx$$

$$= x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2$$

$$= \left(4 - \frac{8}{3}\right) - (0)$$

$$\therefore A = \frac{4}{3}$$



شكل رقم (1-5)

تمارين (1-2)

أحسب قيمة التكاملات الآتية :

$$\int_{-2}^1 (x+1)^2 dx \quad -1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^3} \quad -2$$

$$\int_1^3 (x^2 + 4) dx \quad -3$$

$$\int_3^5 \frac{x^2}{(x-1)} dx \quad -4$$

$$\int_{-2}^1 (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx \quad -5$$

$$\int_{-1}^2 (3x^2 + x^2 - 5x) dx \quad -6$$

-7 جد المساحة بين المنحنيين :

$$y = (x-1)^2$$

$$y = x^2 - x - 2$$

-8 جد المساحة بين المنحنيين :

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x$$

$$y = -4x$$

الفصل

الأول

1-8 الصيغ الأساسية للتكامل Standard Forms Of Integration

يتميز التكامل على العكس من التفاضل بصعوبته وذلك لعدم وجود قواعد عامة تحكم حساباته

رغم أن الكثير من قواعده تستمد من قواعد التفاضل نفسه .

ولغرض تسهيل حساب التكامل لكثير من المسائل التي قد تواجهنا ندرج في أدناه لصيغ التالية والتي ورد ذكر البعض منها سابقا ، وقد نظمت هذه الصيغ حسب بعض الخصائص لتسهيل مهمة العودة إليها .

الصيغ الأولية:

$$\int dx = x + c \quad -1$$

$$\int c dx = c \int dx \quad -2$$

$$\int (du + dv) = \int du + \int dv \quad -3$$

حيث أن $u = f(x)$, $v = f(x)$ وهما دوال تفاضلية بالنسبة لـ x .

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$$

$$= \ln x + c \quad , \quad n = -1$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} = c \quad -4$$

حيث أن $u = f(x)$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln u + c \quad -5 \quad \text{حيث أن } u = f(x)$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c \quad -6 \quad \text{حيث أن } u = f(x)$$

-7 الصيغ التي تحتوي على $(a + bx)$

$$\int (a + bx)^n dx = \frac{1}{b(n+1)} (a + bx)^{n+1} + c \quad -8$$

إذا كانت $n \neq -1$

$$= \frac{1}{b} \ln(a + bx) + c \text{ و}$$

إذا كانت $n = -1$

$$\int x(a + bx)^n dx = \frac{1}{b^2(n+2)}(a + bx)^{n+2} - \frac{a}{b^2(n+1)}(a + bx)^{n+1} + c \quad -9$$

إذا كانت $n \neq -1, -2$

$$= \frac{1}{b^2} [a + bx - a \ln(a + bx)] + c$$

إذا كانت $n = -1$

$$= \frac{1}{b^2} \left[\ln(a + bx) + \frac{a}{a + bx} \right] + c$$

إذا كانت $n = -2$

الفصل

الأول

الصيغ التي تحتوي على $x^2 \pm a^2$ أو $a^2 \pm x^2$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + c \quad -10$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + c \quad -11$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \right] + c \quad -12$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + c \quad -13$$

$$\int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} + c \quad -14$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + c \quad -15$$

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3} + c \quad -16$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + c \quad -17$$

الصيغ الأسية:

$$\int a^u dx = \frac{a^u}{b(\ln a)} + c \quad -18$$

$$\int e^u dx = \frac{e^u}{b} + c \quad -19$$

$$\int xe^u dx = \frac{e^u}{b^2}(bx - 1) + c \quad -20$$

حيث أن $u=f(x)$ في الصيغ (18, 19, 20) و (b) هو معامل (x) .

الصيغ اللوغاريتمية

$$\int (\ln x) dx = x(\ln x) - x + c \quad -21$$

$$\int x(\ln x) dx = \frac{x^2}{2}(\ln x) - \frac{x^2}{4} + c \quad -22$$

$$\int \frac{1}{x(\ln x)} dx = \ln(\ln x) + c \quad -23$$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x) + 2x + c \quad -24$$

$$\int \ln(ax) dx = x(\ln ax) - x + c \quad -25$$

ولغرض الوقوف على تطبيقات هذه الصيغ دعنا نتناول بعض الأمثلة :

أمثلة

أوجد تكامل ما يأتي:

1- $\int (2+3x)^5 dx$ نطبق الصيغة (8)

بما أن $a=2, b=3, n=5$

$$\begin{aligned} \therefore \int (a+bx)^n dx &= \frac{1}{b(n+1)} (a+bx)^{n+1} + c \\ &= \frac{1}{3(6)} (2+3x)^6 + c \\ &= \frac{1}{18} (2+3x)^6 + c \end{aligned}$$

الفصل

الأول

2- $\int a^{2x-1} dx$ نطبق الصيغة (18)

بما أن $b=2, u=2x-1$

$$\therefore \int a^u dx = \frac{a^u}{b(\ln a)} + c = \frac{a^{2x-1}}{2(\ln a)} + c$$

3- $\int 5^{4x} dx$ نطبق الصيغة (18)

بما أن $a=5, b=4, u=4x$

$$\therefore \int \frac{a^u}{b(\ln a)} + c = \frac{5^{4x}}{4(\ln 5)} + c$$

4- $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$ نطبق الصيغة (4)

$$\int 4x^3 dx = 4 \int x^3 dx \quad -5 \quad \text{تطبيق الصيغة (2.4)}$$

$$= 4 \left(\frac{x^4}{4} + c \right)$$

$$= x^4 + c$$

$$\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx \quad -6 \quad \text{تطبيق الصيغة (4)}$$

$$= \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c$$

$$= \frac{x^{-3}}{-3} + c$$

$$= -\frac{1}{3x^3} + c$$

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx \quad -7 \quad \text{نطبق الصيغة (14)}$$

$$dx = \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + c$$

$$= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x^2}} \quad -8$$

$$\therefore du = 6x dx \quad u = 1+3x^2 \quad \text{نفرض أن:}$$

$$\frac{1}{6} du = x dx \quad \text{ثم نطبق الصيغة (4)}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \frac{x \, dx}{\sqrt{1+3x^2}} &= \int_0^4 \frac{\frac{1}{6} du}{u^{1/2}} = \frac{1}{6} \int_0^4 u^{-1/2} du = \frac{1}{6} (2) u^{1/2} \Big|_0^4 \\
 &= \frac{1}{3} u^{1/2} \Big|_0^4 = \frac{1}{3} (1+3x^2)^{1/2} \Big|_0^4 = \frac{1}{3} [(1+3(4)^2)^{1/2} - (1+3(0)^2)^{1/2}] \\
 &= \frac{1}{3} [\sqrt{490} - \sqrt{1}] \\
 &= \frac{1}{3} [7 - 1] \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

9. $\int (\ln x)^2 dx$ تطبيق الصيغة (24)

$$= x(\ln x)^2 - 2x(\ln x) + 2x + c$$

الفصل

10. $\int \frac{1}{1-x} dx$ هذه المسألة من الصيغة (6) $u = f(x) = 1-x$

الأول

أي أن $\int \frac{1}{u} du$ وحلها يساوي :

$$\ln u + c$$

$$= \ln(1-x) + c$$

11. $\int \frac{(2x+1)}{x^2+x-1} dx$ نفرض أن: $u = x^2 + x - 1$

$$\therefore du = (2x+1)dx$$

$$\therefore \int \frac{(2x+1)}{x^2+x-1} dx = \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln u + c = \ln(x^2 + x - 1) + c \quad \text{وبذلك تطبيق الصيغة (6)}$$

12- $\int \sqrt{4+3x} \, dx$ وبإعادة الصياغة ينتج :

$$u = 4 + 3x \text{ نفرض أن } \int (4+3x)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$\therefore du = 3dx$$

$$\therefore \frac{1}{3} du = dx$$

فيكون لدينا :

$$\int (4+3x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \int u^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right) u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9} (4+3x)^{\frac{3}{2}} + c$$

ويمكن تطبيق الصيغة (8) لنحصل على :

$$\int (4+3x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{3\left(\frac{1}{2}+1\right)} (4+3x)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9} (4+3x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{حيث أن : } a=4, b=3, n=\frac{1}{2}$$

13- $\int (x\sqrt{x}-5)^2 \, dx$ وبإعادة الصياغة ينتج :

$$\int (x^{\frac{3}{2}}-5)^2 \, dx = x^{\frac{9}{4}} - 10x^{\frac{5}{2}} + 25x$$

تطبق الصيغة (3) فينتج :

$$= \frac{4}{13} x^{\frac{13}{4}} - 4x^{\frac{5}{2}} + 25x + c$$

$$-14 \quad \int \frac{(1-2x)^2}{\sqrt{2x}} dx \quad \text{وبإعادة الصياغة ينتج :}$$

$$\int \frac{(1-2x)^2}{\sqrt{2} x^{1/2}} dx = \int \frac{(1-4x+4x^2)(x)^{-1/2}}{\sqrt{2}} dx$$

$$= \int \frac{x^{-1/2} - 4x^{1/2} + 4x^{3/2}}{\sqrt{2}} dx$$

والآن نطبق الصيغة (3)

$$= \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - \frac{4x^{3/2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} + \frac{4x^{5/2}}{\frac{5}{2}\sqrt{2}} + c$$

الفصل

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}} - \left(\frac{8}{3}\right) \frac{\sqrt{x}x}{\sqrt{2}} + \left(\frac{8}{5}\right) \frac{\sqrt{x} x^2}{\sqrt{2}} + c$$

الأول

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{5}x^2\right) + c$$

$$-15 \quad \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \quad \text{بإعادة الصياغة ينتج :}$$

$$= \int (x^{1/2} + x^{-1/2}) dx \quad \text{ونتطبيق الصيغة (3) فينتج :}$$

$$= \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c$$

16- $\int 5x \, dx$ تطبيق الصيغة (2 ، 1)

$$= 5 \int x \, dx$$

$$= 5 \int \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$= \frac{5}{2} x^2 + c$$

17- $\int \frac{1}{x+4} \, dx$ تطبيق الصيغة (6) فينتج :

$$\ln(x+4) + c$$

18- $\int 2x(x^2+3)^2 \, dx$ وبإعادة الصياغة ينتج :

$$= \int (x^2+3)^3 (2x) \, dx \text{ تطبيق الصيغة (5) :}$$

نفرض أن $u = x^2 + 3$ $du = 2x \, dx$ \therefore والآن :

$$\int (x^2+3)^2 (2x) \, dx = \int u^2 \, du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 + c = \frac{1}{3} (x^2 + 3)^3 + c$$

تمارين (1-3)

أحسب قيمة التكاملات الآتية :

$$1- \int x e^{-x} \, dx$$

$$2- \int \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin x}$$

$$3- \int \frac{du}{\sin^2 ax}$$

$$\int e^x (x-2)^2 dx \quad -4$$

$$\int x^n \ln x dx \quad -5$$

$$\int x \cos x dx \quad -6$$

$$\int e^{2x^3+x-4} dx \quad -7$$

$$\int (x^{1/3} + x^{1/2})^2 dx \quad -8$$

$$\int x \ln x dx \quad -9$$

$$\int \frac{(x^2 + x) dx}{\sqrt{x+1}} \quad -10$$

1-9 التكامل بالأجزاء Integration by parts

الفصل

الأول

نواجه في بعض الأحيان مسألة إجراء تكامل لمقدار مكون من حاصل ضرب دالتين أو مقدار لوغاريتمي يصعب إجراء عملية التكامل مباشرة ولهذا نلجأ إلى تحويل هذا المقدار إلى تركيب آخر (أي تجزئته) يسهل فيه تطبيق الصيغ الأساسية للتكامل عليه. وتسمى عملية التحويل هذه التكامل بالأجزاء. وتعتمد عملية التكامل بالأجزاء على معكوس عملية تفاضل حاصل ضرب دالتين. فإذا كانت g, h

دالتين لمتغير مستقل واحد مثل x فإن عملية تفاضل الدالة $y(h, g)$ تتم كالآتي :

$$y = f[g(x)h(x)] = f(g, h)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(gh)$$

$$= g \frac{dh}{dx} + h \frac{dg}{dx}$$

وبإعادة الترتيب ينتج :

$$g \frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}(gh) - h \frac{dg}{dx}$$

وبإجراء التكامل لطرفي المعادلة بالنسبة إلى x نحصل على :

$$(1-7) \int g \frac{dh}{dx} dx = \int \frac{d}{dx}(gh) dx - \int h \frac{dg}{dx} dx$$

وباختصار الرموز ينتج :

$$(1-8) \int g dh = gh - \int h dg$$

أمثلة

$$1- \int x e^{2x} dx \text{ جد قيمة التكامل:}$$

الجواب:

لغرض تطبيق (1-8) في حل التمرين ليكن :

$$g = x, \quad dh = e^{2x} dx \text{ وعلى هذا الأساس يكون:}$$

$$dg = dx \text{ و } h = \frac{e^{2x}}{2} \text{ [بعد تكامله حسب الصيغة (19)]}$$

نعيد كتابة المعادلة حسب العلاقة (1-8)

$$\int g dh = gh - \int h dg$$

$$\int x e^{2x} dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx + c$$

$$= \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2(2)} + c$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) + c$$

التكامل

وإذا استخدمنا الصيغة (20) سنحصل على نفس النتيجة وهي الأكثر اختصارا ولكن استخدمنا

المثال لشرح طريقة التكامل بالأجزاء .

$$2- \text{جد تكامل ما يأتي : } \int x e^x dx$$

الجواب :

ليكن $g = x$ ، $dh = e^x dx$ وعلى هذا الأساس يكون :

$$[\text{بعد تكامله حسب الصيغة (19)}] \quad h = \frac{e^x}{1} = e^x \quad \text{و} \quad dg = dx$$

$$\therefore \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx + c$$

$$= x e^x - e^x + c$$

$$= e x(x-1) + c$$

وهي نفس النتيجة إذا أجرينا التكامل حسب الصيغة (20)

$$3- \text{جد تكامل ما يأتي : } \int x e^{-3x} dx$$

الجواب :

ليكن $g=x$ و $dh = e^{-3x} dx$

$$h = \frac{e^{-3x}}{-3} \quad \text{و} \quad dg = dx \quad \therefore \text{بعد إجراء تكامله حسب الصيغة (19)}.$$

والآن:

$$\int x e^{-3x} dx = \frac{x e^{-3x}}{-3} - \int \frac{e^{-3x}}{-3} dx + c$$

$$= \frac{x e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{(-3)^2} + c$$

$$= -\frac{1}{9} e^{-3x} (3x-1) + c$$

الفصل

الأول

4- جد تكامل ما يأتي : $\int x^2 e^x dx$

الجواب :

$$g = x^2 \text{ و } dh = e^x dx$$

$$\therefore dg = 2x \text{ و } h = e^x$$

والآن :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2x + c$$

$$= x^2 e^x - 2e^x (x-1) + c$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) + c$$

5- جد تكامل ما يأتي : $\int x a^x dx$

الجواب :

$$\text{ليكن } g = x \text{ و } dh = a^x dx$$

$$h = x(\ln a) - x + c \text{ و } \therefore dg = dx$$

بعد إجراء التكامل حسب الصيغة (21)

$$\therefore \int x(\ln a) dx = [x(\ln a) - x] - \int x(\ln a) - x dx + c$$

$$= x^2(\ln a) - x^2 - \left[\frac{x^2}{2}(\ln a) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \right] + c$$

$$= x^2(\ln a) - x^2 - \frac{x^2}{2}(\ln a) + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln a) - \left(x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} \right) + c$$

$$= \frac{x^2}{2} (\ln x) - \frac{x^2}{4} + c$$

وهي نفس الصيغة لو أجرينا التكامل مباشرة حسب الصيغة (22)

تمارين (1-4)

جد قيمة التكاملات الآتية باستخدام التكامل بالأجزاء :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^3}} \quad -1$$

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x^3} dx \quad -2$$

$$\int \frac{x^3 dx}{(x^2+4)^2} \quad -3$$

$$\int \frac{(3x^2-5x-6)dx}{(x^2+1)(x-3)} \quad -4$$

$$\int \frac{(x^{1/3} - x^{2/3})dx}{2x^{1/4}} \quad -5$$

الفصل

الأول

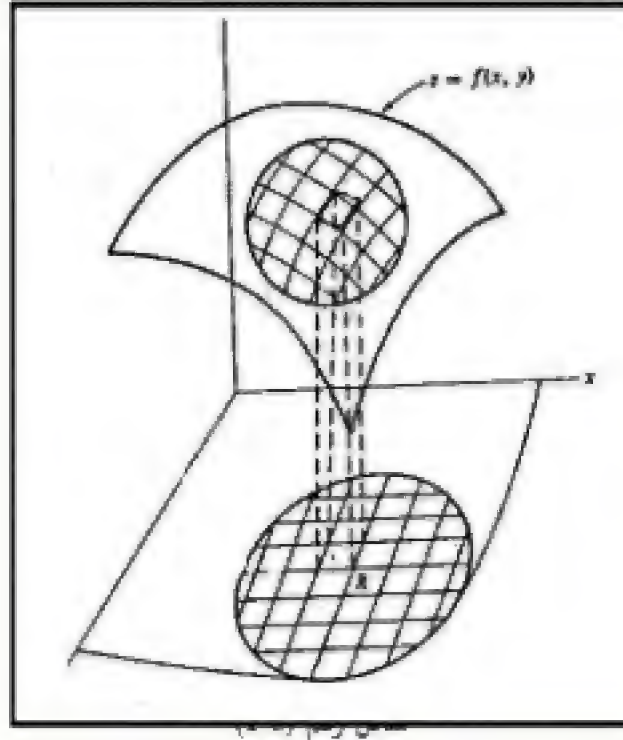
1-10 التكامل المضاعف Multiple Integration

يحدد تكامل : $\int_a^b f(x) dx$ بالنسبة للدالة $f(x)$ بحدود المسافة $a \leq x \leq b$

وبنفس الطريقة يحدد التكامل المضاعف : $\iint_R f(x,y) dy dx$ بالنسبة للدالة $f(x,y)$

بحدود المنطقة المحددة (R) بالمستوى (x , y) . ويعرف تكامل $f(x)$ بالمساحة، أما التكامل المضاعف فيعرف بالحجم كما مبين في الشكل رقم (1-6) بافتراض كون الدالة

$f(x, y)$ موجبة فوق المنطقة (R) أما الحجم المحسوب فيقع تحت السطح $z = f(x, y)$ وفوق المنطقة (R) في المستوى (x, y)



إن حساب التكامل المضاعف يتم عن طريق التكامل الجزئي المتوالي وهو عكس عمليات التفاضل الجزئي. أي عند حساب التكامل المضاعف لدالة ذات متغيرين مستقلين يفترض تغير احدهما وثبات الآخر ومن ثم يتم تكامل الدالة الجديدة بالنسبة للمتغير الآخر. أي حسب الصيغة التالية :

$$\iint_R f(x, y) dy dx \text{ أو حسب الصيغة الأكثر تفصيلاً :}$$

$$\int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy dx$$

حيث أن a, b ثوابت . ويمكن كتابة الصيغة الأخيرة كالآتي :

$$(1-9) \quad \int_a^b \left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

ولحساب تكامل $f(x, y)$ يتم أولاً جزئياً بالنسبة للمتغير y وبحسب لنهايات معينة. وتكون النتيجة دالة x والتي يتم تكاملها بالنسبة للمتغير x محسوبة النهايات معينة أيضاً. وتجدر الإشارة إلى أن التكامل يتم من الداخل إلى الخارج ولهذا فإن الإشارة الأولى

التكامل

للتكامل تعود إلى آخر عملية للتفاضل وهكذا. كما يجب الإشارة إلى ضرورة حذف المتغير الذي تجري عملية تكامله من التكامل المتبقي نهائياً.

أمثلة

احسب قيمة التكامل المضاعف التالي :

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{x}{y^2} dy dx \quad (1)$$

الجواب :

بإعادة الصياغة نحصل على :

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^{-2} dy dx$$

الآن تبدأ عملية التكامل من الداخل إلى الخارج بافتراض x ثابت :

$$\text{الفصل} \quad \int_0^1 xy \Big|_{x^2}^x dx$$

ويظهر أن التكامل أصبح $f(x)$ وبذلك تكون الخطوة التالية هي حساب قيمة التكامل عندما

الأول تكون y محددة بالفترة (x, x^2) :

$$\int_0^1 [x(x) - x(x^2)] dx$$

$$= \int_0^1 x^2 - x^3 dx$$

والآن أصبح التكامل $f(x)$ وبالإمكان حساب قيمته كالآتي :

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{4}(1)^4 \right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{4}(0)^4 \right]$$

$$= \frac{1}{12} - (0) = \frac{1}{12}$$

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+2) dy dx \quad (2)$$

الجواب :

نبدأ عملية التكامل بافتراض x ثابت .

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 xy + 2y \Big|_0^2 dx \\ &= \int_0^1 [x(2) + 2(2) - x(0) + 2(0)] \\ &= \int_0^1 2x + 4 dx \end{aligned}$$

والآن تكامل بالنسبة إلى x لنحصل على :

$$\begin{aligned} &= x^2 + 4x \Big|_0^1 \\ &= [(1)^2 + 4(1)] - (0) \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \int_y^2 x^{1/2} dx dy \quad (3)$$

الجواب :

$$\int_0^1 2 \frac{x^{3/2}}{3} \Big|_y^2 dy \quad (\text{بافتراض أن } y \text{ ثابت})$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left(\frac{2y^{3/2}}{3} - \frac{2y^3}{3} \right) dy \\ &= \frac{4}{15} y^{5/2} - \frac{1}{6} y^4 \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{4}{15} - \frac{1}{6} \right) - (0) \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\int_0^{-1} \int_{y+1}^{2y} xy \, dx \, dy \quad (4)$$

$$(\text{بافتراض } y \text{ ثابت}) \int_0^{-1} \frac{1}{2} x^2 y \Big|_{y+1}^{2y} dx$$

$$= \int_0^{-1} \frac{(2y)^2 y - (y+1)^2 y}{2} dy$$

$$= \int_0^{-1} \frac{(4y^3 - y^3 - 2y^2 - y)}{2} dy$$

$$= \int_0^{-1} \frac{(3y^3 - 2y^2 - y)}{2} dy$$

$$= \left[\frac{3}{8} y^4 - \frac{2}{6} y^3 - \frac{y^2}{4} \right]_0^{-1}$$

$$= \left[\frac{3}{8} (-1)^4 - \frac{2}{6} (-1)^3 - \frac{(-1)^2}{4} \right] - (0)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{2}{6} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{11}{24}$$

الفصل

الأول

تمارين (1-5)

حدد قيمة التكاملات المضاعفة الآتية :

$$\int_0^2 \int_1^3 (x-y) dx dy \quad -1$$

$$\int_0^{-1} \int_{y^2}^2 x dx dy \quad -2$$

$$\int_0^2 \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} dx dy \quad -3$$

$$\int_{-3}^0 \int_0^x x^2 y^2 dx dy \quad -4$$

الفصل الثاني

التكامل

وتطبيقاته الاقتصادية

التكامل وتطبيقاته الاقتصادية

المقدمة

2-1

ذكرنا في الفصل الخامس عند استعراض التحليلات الكمية للظواهر الاقتصادية باستخدام حساب التكامل بأن التغيرات التي تطرأ على المتغيرات المستقلة في أية دالة والتي تؤثر على المتغير المعتمد ربما تكون مباشرة أو تأخذ صيغة المتوسط أو الصيغة الحدية . وأن الصيغة الحدية يمكن أن تستخرج عن طريق إجراء التفاضل كما يمكن معرفة الدالة إذا كانت لدينا الصيغة الحدية لها بغض النظر عن الثابت الذي تحتويه وذلك عن طريق إجراء عملية التكامل للدالة الحدية والفقرات التالية تعطي عرضاً لبعض التحليلات الكمية الاقتصادية بمساعدة ما يقدمه فن التكامل .

التكاليف Costs

2-2

عندما تعطى دالة التكاليف بصيغة: $y = f(x)$ حيث أن y تمثل التكاليف الكلية و x هي الكميات المنتجة والمسوقة من سلعة معينة . فإن متوسط التكاليف يكون:

$$\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

أما التكاليف الحدية (MC) فهي:

$$(2-1) \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ويبدو واضحاً بأن $f'(x)$ ما هي إلا مشتقة الدالة y بالنسبة إلى x وقد نحتاج أحياناً للبحث عن $f(x)$ مبتدئين بـ $f'(x)$ أي إذا أعطينا $f'(x)$ وطلب منا إيجاد $f(x)$ نبدأ العمل عن طريق إجراء تكامل الدالة $f'(x)$ بالنسبة إلى x لنحصل على:

$$(2-2) \quad \begin{aligned} y &= \int f'(x) dx \\ &= f(x) + c \end{aligned}$$

وحيث أن c يأخذ قيما عديدة غير محددة لذلك سنحصل على مجموعة لانهاية لها من دوال التكاليف ، ولتفادي مثل هذه المشكلة وحيث أن الهدف هو معرفة دالة التكاليف المعنية لهذا ينبغي ذكر الشرط الأولي : أي تحديد مقدار (c) الذي يعني في الدالة أعلاه مقدار التكاليف الثابتة أو التكاليف قبل التشغيل أي مجموع التكاليف عندما تكون: $x = 0$
دعنا نتناول أمثلة توضيحية :

مثال (1) :

كانت التكاليف الحدية كدالة للوحدة الواحدة المنتجة من السلعة (x) كالآتي :

$$MC = y = \frac{dy}{dx} = 0.2 - 0.036x$$

جد دالة التكاليف الكلية إذا علمت بأن التكاليف الثابتة كانت (25) وحدة .

الجواب :

$$\begin{aligned} y &= \int (0.2 - 0.036x) dx \\ &= 0.2x - 0.018x^2 + c \end{aligned}$$

والآن عندما $x = 0$ فإن $y = 25$ ويكون لدينا :

$$\begin{aligned} 25 &= 0.2(0) - 0.018(0)^2 + c \\ \therefore c &= 25 \end{aligned}$$

وبذلك نحصل على دالة التكاليف الكلية بصيغتها الكاملة كالآتي :

$$y = 25 + 0.2x - 0.018x^2$$

مثال (2) :

وجد مدير الإنتاج في إحدى المصانع أن دالة التكاليف الحدية لإنتاج وحدة واحدة من السلعة (x)

(كالآتي :

$$MC = \frac{dy}{dx} = y' = 8 + 15x - 2x^3$$

جد دالة التكاليف ودالة متوسط التكاليف إذا كانت التكاليف الثابتة (42) وحدة.

الجواب:

$$y = \int (8 + 15x - 2x^3) dx$$

$$= 8x + 7.5x^2 - 0.5x^4 + c$$

وعندما تكون $x = 0$ فإن $y = 42$ ولهذا فإن $c = 42$ وحدة

إذن :

$$y = 42 + 8x + 7.5x^2 - 0.5x^4$$

وعليه فإن دالة متوسط التكاليف تكون :

$$\frac{y}{x} = \frac{42}{x} + 8 + 7.5x - 0.5x^3$$

Revenue العائدات

2-3

عندما تكون دالة الطلب بالصيغة الآتية :

$$(2-3) \quad p = f(q)$$

حيث أن (p) هو سعر الوحدة الواحدة من المنتجات (q)، ومن دالة الطلب يمكن استخراج

دالة العائدات (R) على أساس أن :

$$(2-4) \quad \begin{aligned} R &= pq \\ &= qf(q) \end{aligned}$$

أما دالة العائدات الحدية بالنسبة إلى الطلب (q) فهي مشتقة دالة العائدات بالنسبة إلى (q) أي

أن :

$$(2-5) \quad MR = R' = \frac{dR}{dq} = R'(q)$$

وإذا كانت في متناولنا دالة العائدات الحدية فيمكن عن طريق إجراء تكاملها أن نحصل على دالة العائدات منسوبة لـ (q) كما يلي :

$$\begin{aligned} R &= \int R'(q) dq \\ (2-6) \quad &= R(q) + c \end{aligned}$$

وتبقى لدينا مشكلة المقدار الثابت (c) في دالة العائدات والذي ينبغي أن يحدد طبقا للشرط الأولي كي تكون الدالة المستخلصة هي الدالة الوحيدة ولما كانت العائدات تساوي صفرا عندما لا تكون هناك أية مبيعات أي عندما (q = 0) لذلك يمكن اعتبار قيمة c = 0 عندما q = 0 في دالة العائدات . كما ينبغي ملاحظة أن متوسط العائدات أو ما يسمى بعائد الوحدة الواحدة ما هو إلا سعر الوحدة الواحدة (p) ولهذا فإن منحنى متوسط العائدات ومنحنى الطلب متطابقان أي أن :

$$p = \frac{R}{q}$$

لنأخذ بعض الأمثلة :

مثال (1) :

أشرت عائدات إحدى المزارع دالة عائدات حدية كالاتي :

$$\frac{dR}{dq} = 10 - 3q - q^2$$

والمطلوب إيجاد دالة العائدات ودالة الطلب :

الجواب :

$$\begin{aligned} R &= \int R'(q) dq = \int (10 - 3q - q^2) dq \\ &= 10q - \frac{3}{2}q^2 - \frac{1}{3}q^3 + c \end{aligned}$$

وعندما تكون q = 0 فإن R = 0 وبذلك تكون c = 0

إذن دالة العائدات الكلية هي :

$$R = 10q - \frac{3}{2}q^2 - \frac{1}{3}q^3$$

أما دالة الطلب فهي :

$$\begin{aligned} p = \frac{R}{q} &= 10 \frac{q}{q} - \frac{3}{2} \frac{q^2}{q} - \frac{q^3}{3q} \\ &= 10 - \frac{3}{2}q - \frac{1}{3}q^2 \end{aligned}$$

ونشير هنا إلى أن (P) يمثل السعر .

مثال (2) :

أعطيت دالة العائدات الحدية لإحدى المنشآت بالصيغة الآتية :

$$MR = \frac{dR}{dq} = \frac{a}{q+b} - k$$

حيث أن q هي الكميات المنتجة والمباعة و (a , b , k) ثوابت والمطلوب إيجاد دالة الطلب :

الجواب :

$$R = \int \left(\frac{a}{q+b} - k \right) dq$$

$$R = a \ln(q+b) - kq + c$$

وهذه هي دالة العائدات . أما دالة الطلب فتستخرج كما ذكرنا سابقا من خلال العلاقة $R = p \cdot q$

وهنا p تمثل السعر أي أن :

$$p = \frac{R}{q} = \frac{1}{q} a \ln(q+b) - k + \frac{c}{q}$$

مثال (3):

كانت دالة العائدات الحدية في معمل للإطارات بالصورة الآتية :

$$\frac{dR}{dq} = 9 - 6q + q^2$$

جد دالة العائدات ودالة الطلب ما هي الحدود التي وضعها المعمل على إنتاج وتسويق إنتاجه (

q

الجواب:

$$\begin{aligned} R &= (3 - 4q + q^2) dq \\ &= 3q - 2q^2 + \frac{1}{3}q^3 + c \end{aligned}$$

وحيث أن $c = 0$ لأن $R = 0$ عندما $q = 0$

$$\therefore R = 3q - 2q^2 + \frac{1}{3}q^3$$

أما دالة الطلب فتساوي :

$$\begin{aligned} p &= \frac{R}{q} = 3 - 2q + \frac{1}{3}q^2 \\ &= \frac{9 - 6q + q^2}{3} \\ \therefore p &= \frac{(3 - q)^2}{3} \end{aligned}$$

وهكذا يبدو أن الحدود التي وضعت على q هي أن تكون :

$$0 < q < 3$$

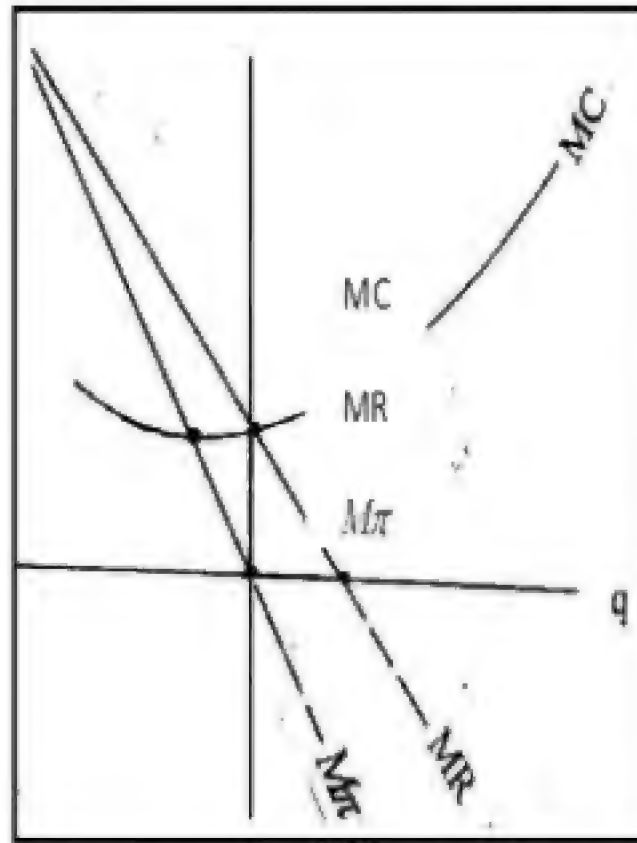
لأن $q = 0$ ليس لها معنى اقتصادي أما $q = 3$ فيؤدي إلى أن تكون نتيجة الطرف الأيسر في دالة

السعر صفرا وبذلك يكون $p = 0$ وهذا غير ممكن.

التكاليف والعائدات والأرباح الحدية (Marginal (Cost , Revenues and Profits

4-2

يمكن استخدام التكامل في تحديد الأرباح الكلية بافتراض وجود سوق المنافسة التامة حيث أن الأرباح تعظم عندما تتساوى العائدات الحدية مع التكاليف الحدية ($MR=MC$). ولهذا فإن الأرباح الكلية هي تكامل الفرق MR و MC منذ بدء الإنتاج (الإنتاج $= 0$) وحتى تبلغ الكميات التي تكون عندها الإرباح في أقصىها، أي أنها تكامل الأرباح الحدية (πM) ضمن مدى الإنتاج أعلاه. كما في الشكل رقم (2-1).



دعنا نستعين بالأمثلة :

مثال (1) :

إذا كانت لدينا كل من دالة العائدات الحدية والتكاليف الحدية كما في الصيغة الآتية والمطلوب استخدام هاتين الدالتين لإيجاد مستوى الإنتاج الذي عنده تحقق المؤسسة أقصى الأرباح ومقدار الأرباح الكلية عند هذه النقطة.

$$MR = 40 - 3q - 2q^2$$

$$MC = 10 - 2q + q^2$$

الجواب:

من الواضح أن الأرباح الحدية ($M\pi$) أي أقصى الأرباح تتحقق عندما $MR=MC$ أو عندما $MR=MC=0$ كما في الشكل (2-1) ولهذا فإن:

$$M\pi = MR - MC = (40 - 3q - 2q^2) - (10 - 2q + q^2) = 0$$

$$= 30 - q - 3q^2 = 0$$

$$= (3 - q)(10 + 3q) = 0$$

$$\therefore q = 3$$

$$\text{أو } q = -\frac{10}{3} \text{ تهمل النتيجة السالبة } N \notin$$

والآن لدينا دالة الأرباح الحدية ($M\pi$) أي لدينا $30 - q - 3q^2$ وان مشتقتها الثانية

تؤشر لنا فيما إذا كانت الأرباح في حالة تعظيم أو إقلال بالنسبة لقيمة معينة من (q) وذلك:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -1 - 6q$$

وعندما يكون مستوى الإنتاج ($q = 3$) فإن : $\frac{d^2\pi}{dq^2} = -1 - 6(3) = -19$ أي أن : $\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0$

ولهذا فإن الأرباح تكون عند مستواها الأعظم عندما تكون $q = 3$ أما الأرباح الكلية فتستخرج

باجراء تكامل لدالة الأرباح الحدية في المدى ما بين (0-3) وكما يأتي:

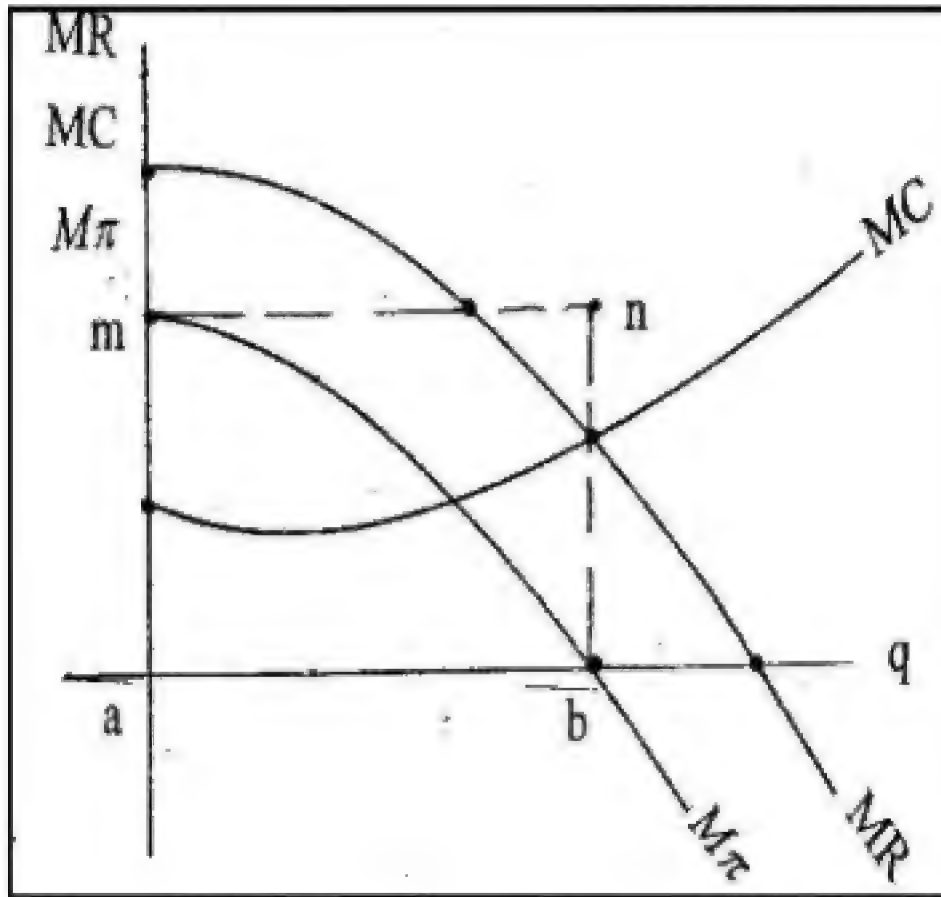
$$\pi = \int_0^3 (30 - q - 3q^2) dq \text{ : الأرباح الكلية :}$$

$$= 30q - \frac{1}{2}q^2 - q^3 \Big|_0^3$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[30(3) - \frac{1}{2}(3)^2 - (3)^3 \right] - \left[30(0) - \frac{1}{2}(0)^2 - (0)^3 \right] \\
 &= 90 - \frac{9}{2} - 27 \\
 &= 58.5
 \end{aligned}$$

وهي الأرباح الكلية

وكما يظهر في الشكل رقم (2-2):



شكل رقم (2-2)

ملاحظة:

لغرض تسهيل عملية رسم الشكل (2-2) افترضنا بأن كل (10) وحدات من q تقابل وحدة واحدة

من π , MR , MC , M

إن عملية استخراج الأرباح الكلية هي عملية إيجاد المساحة تحت المنحنى

$A = 30 - q - 3q^2$ وذلك عن طريق إجراء تكامل الدالة (A) بين الحد الأدنى والحد الأعلى

للإنتاج (q) أي بين $0 \leq q \leq 3$ ويبدو واضحاً أن المساحة المظللة (abm) هي أكبر

من نصف المساحة $(abnm)$ حيث أن أبعاد $(abnm)$ هندسية وأن $(ab=3)$ وهو الحد الأعلى للإنتاج (q) أما $am = 30$ عندما $q = 0$ وعلى هذا الأساس فإن مساحة $abnm = ab \times am = 3 \times 30 = 90$ ولما كانت $abm = 58.5$ حسبما ورد في الحل لذلك نلاحظ عند مقارنة المساحتين في الشكل (2-2) بأن $abm < \frac{1}{2} abnm$ وهو ما يحقق صحة الحل من خلال نظرة أولى إلى الشكل البياني.

مثال (2):

وجد في إحدى المنشآت أن دالة التكاليف الحدية والعائدات الحدية كالآتي:

$$MC = 10 - 3q + 2q^2$$

$$MR = 50 - 5q$$

والمطلوب إيجاد:

(أ) مستوى الإنتاج الذي يحقق للمنشأة أعظم ربح.

(ب) مقدار الأرباح الكلية على افتراض سيادة سوق المنافسة التامة.

الجواب:

$$M\pi = MR - MC = (50 - 5q) - (10 - 3q + 2q^2) = 0 \quad (1)$$

$$= 40 - 2q - 2q^2 = 0$$

$$= (5 + q)(8 - 2q) = 0$$

$$(\text{تُهمل}) \quad q = -5 \quad \text{أو} \quad q = 4$$

والآن لنرى فيما إذا كانت دالة الأرباح عند مستواها الأعلى أو الأدنى عندما تكون $q = 4$ وذلك:

$$\frac{dM\pi}{dq} = -2 - 4q$$

$$= -2 - 4(4) = -18$$

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0 \quad \therefore \text{أي أن: } \frac{dM\pi}{dq} < 0$$

ولهذا فإن دالة الأرباح تكون في مستواها الأعظم عندما $q=4$ وإذا ما كاملنا دالة الأرباح الحدية

نحصل على دالة الأرباح الكلية (π) المحصورة بين (0, 4) من وحدات الإنتاج (q):

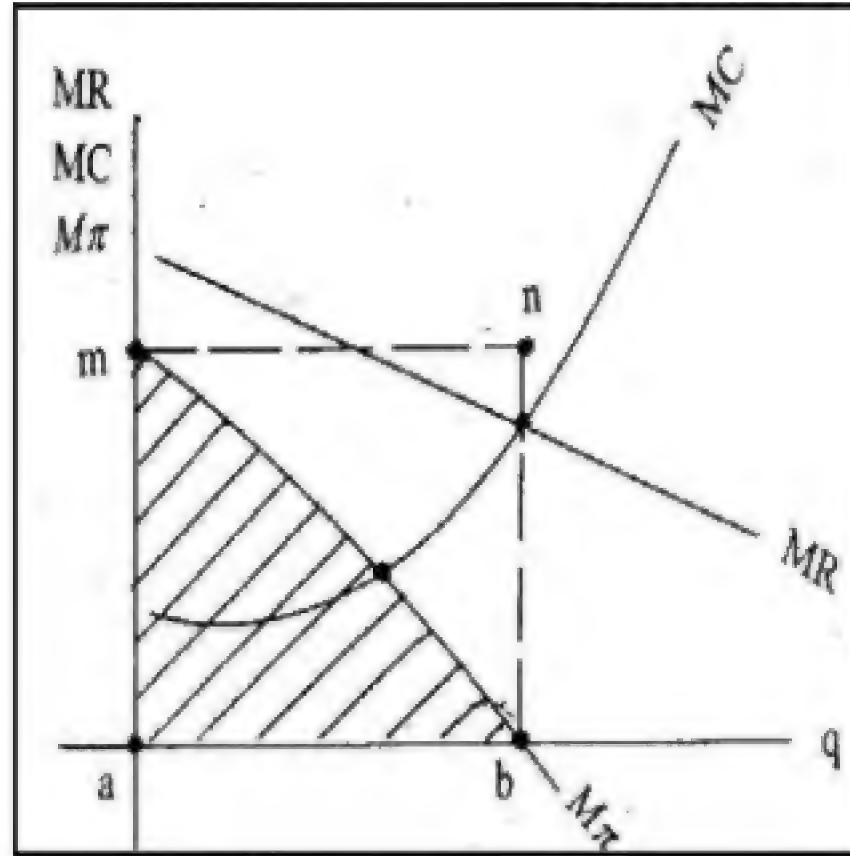
$$\pi = \int_0^4 (40 - 2q - 2q^2) dq$$

$$= 40q - q^2 - \frac{2}{3}q^3 \Big|_0^4$$

$$= \left[160 - 16 - \frac{128}{3} \right] - [0]$$

$$= \frac{304}{3} = 101.3$$

كما موضح في الشكل رقم (2-3)



شكل رقم (2-3)

وواضح أيضاً أن المساحة المظللة $abm = 101.3$ وقد حصلنا عليها بإجراء تكامل لدالة الأرباح الحدية بين (0, 4) من الإنتاج (q) ويلاحظ أيضاً ولأجل التدقيق السريع أن:

$$(\frac{1}{2} abnm < 103.3) \text{ أي :}$$

$$\frac{1}{2}(100) < 103.3$$

بحثنا في هذه الفقرة العلاقة بين العائدات والتكاليف والأرباح في حالة كون التكامل غير محدد أما إذا كان التكامل محدد فإن بعض العمليات الرياضية قد تحتاج إلى بعض الإيضاح. وقبل أن نبدأ العمل بذلك نذكر بأن المنتج يحصل على أقصى الأرباح في ظل المنافسة التامة إذا تساوت كل من التكاليف الحدية مع العائدات الحدية ($MR=MC$) وعلى هذا الأساس فإن مجموع الأرباح تستخرج من عملية تكامل الفرق بين العائد الحدي والتكاليف الحدية ($MR-MC$) ابتداءً من لحظة كون الإنتاج يساوي صفراً إلى الكمية التي تكون عندها الأرباح في أقصى مستوى لها.

وقد يكون من المفيد تناول بعض الأمثلة:

مثال (1):

جد النقطة التي يكون عندها الإنتاج بمستوى يحقق أقصى الأرباح إذا كان العائد الحدي والتكاليف الحدية كما في الصيغة الآتية:

$$MR = 14 - 3x - 3x^2$$

$$MC = 8 - 2x - 2x^2$$

الجواب:

كي يحقق المنتج أقصى الأرباح عندما:

$$MR - MC = 0$$

$$\therefore 14 - 3x - 3x^2 - (8 - 2x - 2x^2) = 0$$

$$6 - x - x^2 = 0$$

وبإعادة الصياغة:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\text{إما } x - 2 = 0 \text{ أو } x + 3 = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad \therefore x = -3 \text{ (تُهمل)}$$

والآن نلاحظ بأن المشتقة الأولى للدالة (MR-MC) ما هي إلا المشتقة الثانية لمجموع الأرباح وإن

إشارة هذه المشتقة تشير إلى ما إذا كانت الأرباح في أقصاها أو أدناها لكمية معينة من الإنتاج (x). لنتابع

الحل:

ضع للاختصار $MR-MC=y$

$$\therefore y = 6 - x - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 - 2x \text{ و}$$

$$MR = 14 - 3x - 3x^2$$

وحيث أن:

$$\therefore R = \int (14 - 3x - 3x^2) dx$$

$$\therefore R = 14x - \frac{3}{2}x^2 - x^3 + c$$

$$MC = 8 - 2x - 2x^2$$

و

$$C = \int (8 - 2x - 2x^2) dx$$

$$\therefore C = 8x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + c$$

والآن الأرباح (P) هي :

$$P = R - C = (14x - \frac{3}{2}x^2 - x^3 + c) - (8x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + c)$$

$$\therefore P = 6x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

$$\frac{dP}{dx} = 6 - x - x^2 = (MR - MC)$$

والآن:

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -1 - 2x$$

وهكذا نلاحظ بأن:

$$\frac{d}{dx}(MR - MC) = \frac{d^2P}{dx^2}$$

والآن نواصل الحل: بما أن $x=3$ (كما في أعلاه)

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d^2P}{dx^2} &= -1 - 2(2) \\ &= -5 < 0 \end{aligned}$$

إذن تكون الأرباح في أقصىها عندما يكون الإنتاج ($x=3$) أما مجموع الأرباح فيكون:

$$TP = \int_0^3 (6 - x - x^2) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= 6x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 \\
 &= 6(2) - \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{3}(2)^3 - (0) \\
 &= 12 - 2 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}
 \end{aligned}$$

وهذه النتيجة تدلنا على طريقة اختصار كل العمليات السابقة والبدء من دالة (MR-MC) ومن

ثم إجراء تكاملها للحصول على الأرباح الكلية (TP) مباشرة بعد تحديد مستوى الإنتاج.

مثال (2):

إذا كانت العائدة الحدية والتكاليف الحدية كما مبين في أدناه . جد مستوى الإنتاج الذي يحقق

أقصى الأرباح واستخرج بعدئذ مجموع الأرباح.

$$MR = 20 - 2x$$

$$MC = x^2 - 8x + 20$$

الجواب:

$$MR - MC = 0 \text{ نضع}$$

$$MR - MC = 20 - 2x - (x^2 - 8x + 20) = 0$$

$$= -x^2 + 6x = 0$$

$$x(-x + 6) = 0$$

$$\text{إما } -x + 6 = 0$$

$$\therefore x = 6$$

أو $x = 0$ (نهمل لأنه لا معنى للتحليل إذا كان الإنتاج صفر)

والآن:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(MR - MC) &= -2x + 6 \\ &= -2(6) + 6 \\ &= -6 < 0\end{aligned}$$

إذن تكون الأرباح في أقصاها عندما يكون الإنتاج $(x = 6)$ أما مجموع الأرباح (TP) فهي :

$$\begin{aligned}TP &= \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \Big|_0^6 \\ &= -\frac{1}{3}(6)^3 + 3(6)^2 - (0) \\ &= -72 + 108 \\ &= 36\end{aligned}$$

مثال (3):

توصلت إحدى الشركات إلى دراسة تفيد بأن كل وحدة حاسوب تضيفها إلى الوحدات القائمة تؤدي إلى الاقتصاد في الوقت والأخطاء بموجب المعادلة الآتية: $MR = 3x^2 + 11$ حيث أن (x) تشير إلى عدد الوحدات المضافة أما كلفة إدامة وصيانة وحدة الحاسوب فهي: $MC = 4x^2 + 2$ حيث تشير (x) هنا إلى عدد الوحدات المضافة أيضاً. ولأجل تعظيم صافي العائدات $(R - C)$ فما هي عدد الوحدات التي ينبغي إضافتها وما هو مقدار الاقتصاد في الوقت والأخطاء. مفترضين أن كل من المنحنيين R و C مستمران

الجواب:

$$MR - MC = 0$$

دع:

التكامل وتطبيقاته الاقتصادية

$$\therefore 3x^2 + 11 - (4x^2 + 2) = 0$$

$$-x^2 + 9 = 0$$

وبإعادة الترتيب ينتج :

$$x^2 - 9 = 0$$

$$\therefore (x-3)(x+3) = 0$$

$$\therefore x = 3$$

أو $x = -3$ (تهمل)

والآن:

$$\frac{d}{dx}(MR - MC) = -2x$$

$$= -2(3)$$

$$= -6 < 0$$

\therefore تكون العائدات في أقصاها (وهي الاقتصاد في الوقت والأخطاء) عندما يكون عدد الوحدات

المضافة ($x = 3$) والآن يكون مقدار العائد (TP) كما يأتي :

$$TP = \int_0^3 (-x^2 + 9) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 9x \right]_0^3$$

$$= -\frac{1}{3}(3)^3 + 9(3) - (0)$$

$$= -9 + 27$$

$$= 18$$

وهكذا تظهر النتائج بأن من مصلحة الشركة إضافة (3) وحدات حاسوب إلى أجهزتها وتحصل على أقصى فائدة من استخدامها في تقليل الوقت والأخطاء حيث تقيم هذه الفائدة بـ (18) وحدة نقدية .

5-2 Depreciation الاندثار

يقصد بالاندثار الانخفاض في قيمة الموجودات الثابتة من جراء الاستخدام والتآكل. وتقوم المنشآت عادة برصد مبالغ سنوية تسمى مخصصات الاندثار لغرض تعويض هذا الانخفاض في قيمة موجوداتها ، وتحسب هذه المخصصات السنوية بطرق عديدة أما معدلاتها فتخضع أيضا لحسابات خاصة تعتمد على طبيعة الموجودات الثابتة وظروف تشغيلها والوسائل المتاحة لصيانتها. ومن التطبيقات السائدة لتقدير الاندثار هي حساب معدل الاندثار كدالة للزمن بعد تحديد الفترة التي تصلح فيها الآلة للاستعمال والتشغيل. وتأخذ الدالة المذكورة الصيغة الآتية :

$$D = t^2 e' \quad (2-8)$$

حيث أن (D) هو معدل الاندثار، (t) الفترة الزمنية، (e) أساس اللوغاريتم الطبيعي. وعلى هذا يمكن حساب قيمة الاندثار الكلي بعد فترة زمنية (T) بإجراء تكامل للدالة (D) كالآتي :

$$T D = \int_0^T t^2 e' dt \quad (2-9)$$

وعند حساب قيمة أعلاه بطريقة التكامل بالأجزاء نحصل على :-

$$\begin{aligned} \int t^2 e' dt &= \int t^2 d(e') \\ &= t^2 e' - \int e' d(t^2) \\ &= t^2 e' - 2 \int e' t dt \end{aligned}$$

$$= t^2 e' - 2(te' - \int e' dt)$$

$$= t^2 e' - 2(te' - e')$$

$$= e' (t^2 - 2t + 2) + c$$

وفي ضوء ذلك وبعد مرور الفترة الزمنية للاندثار (T) فإن قيمة الاندثار تكون :-

$$= e^T (T^2 - 2T + 2) - e^0 (0 - 0 + 2)$$

$$= e^T (T^2 - 2T + 2) - 2$$

والآن لنأخذ المثال التالي :-

مثال:

اشترت إحدى المؤسسات حاسوباً وقدرت عمره الإنتاجي بـ (10) سنوات احسب مجموع الاندثارات

التي ستتحملها المؤسسة خلال الفترة أعلاه إذا كان معدل الاندثار يحسب بموجب المعادلة الآتية :-

$$D = t^2 e' dt$$

الحيواب:

$$TD = \int_0^{10} t^2 e' dt$$

$$= e^{10} [10^2 - 2(10) + 2] - 2$$

$$= 22026.5 [100 - 20 + 2] - 2$$

$$= 22026.5 (80)$$

$$= 1762120$$

National Income Consumption and Saving

تناولنا في الفصل الثاني دالة الاستهلاك بشكلها الخطي وذلك كون الاستهلاك دالة للدخل القومي.

$$(2-10) \quad c = f(y)$$

حيث أن: (c) هو الاستهلاك الكلي و (y) مستوى الدخل القومي وعلى هذا الأساس فإن الميل الحدي للاستهلاك ما هو إلا المشتقة الأولى لهذه الدالة.

$$(2-11) \quad \frac{dc}{dy} f'(y)$$

وعلى افتراض أن الدخل القومي هو مجموع الاستهلاك والادخار أي أن :

$$y = c + s$$

$$s = y - c$$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{dy}{dy} - \frac{dc}{dy}$$

$$(2-12) \quad = 1 - \frac{dc}{dy}$$

وإذا ما أعطينا دالة الميل الحدي للاستهلاك فبالإمكان الوصول إلى مستوى الاستهلاك الكلي عن طريق إجراء تكامل الدالة المذكورة بالنسبة إلى (y) وذلك :

$$(2-13) \quad \begin{aligned} c &= \int f'(y) dy \\ &= f(y) + k \end{aligned}$$

ولغرض الوصول إلى دالة استهلاك معينة وليس دوال متعددة لذا يجب أن يتوفر الشرط الابتدائي الذي يحدد لنا قيمة (k) مع ملاحظة أن (k) هنا هو الثابت عند إجراء عملية التكامل وقد وضعناه بدلاً من (c) الذي اعتدنا عليه في عمليات التكامل لأجل تمييزه عن (c) الذي يرمز للاستهلاك الكلي في المعادلة (2-10) أعلاه.

مثال (1):

حدد أحد الاقتصاديين الميل الحدي للاستهلاك (بملايين الوحدات النقدية) بالآتي:

$$\frac{dc}{dy} = 0.7 + 2y^{\frac{1}{2}}$$

وعلى افتراض أن الاستهلاك يكون (10) إذا كان مستوى الدخل القومي (0) احسب دالة الاستهلاك

الجواب:

$$\begin{aligned} c &= \int (0.7 + 2y^{\frac{1}{2}}) dy \\ &= 0.7y + \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} + k \end{aligned}$$

وحيث أن $k = 10$ عندما $y = 0$ $\therefore c = 10$

ولهذا فإن دالة الاستهلاك الكلي هي :

$$c = 10 + 0.7y + \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}$$

مثال (2):

تشير الإحصاءات في أحد البلدان بأن الميل الحدي للدخار كان 0.2 وعندما يكون مستوى الدخل

القومي صفراً فإن مستوى الاستهلاك يكون (12). جد دالة الاستهلاك.

الجواب:

$$\frac{ds}{dy} = 1 - \frac{dc}{dy}$$

بما أن:

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dc}{dy} &= 1 - 0.2 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

ويأجرء تكامل الدالة $\frac{dc}{dy}$ ينتج :

$$c = \int 0.8 dy$$
$$= 0.8y + k$$

وحيث أن $c = 12$ عندما $y = 0$ لهذا فإن $k=12$ إذن دالة الاستهلاك الكلي تكون:

$$c = 12 + 0.8y$$

مثال (3):

قدر الميل الحدي للادخار بالآتي:-

$$\frac{ds}{dy} = 1 - 0.4 - \frac{1}{6y^{\frac{2}{3}}}$$

جد دالة الاستهلاك مع العلم أن الاستهلاك الكلي يبلغ (24) عندما يكون مستوى الدخل صفراً.

الجواب:

$$\frac{ds}{dy} = 1 - \frac{dc}{dy}$$

$$\therefore \frac{dc}{dy} = 1 - \frac{ds}{dy}$$

$$= 1 - (1 - 0.4 - \frac{1}{6y^{\frac{2}{3}}})$$

$$= 0.4 + \frac{1}{6y^{\frac{2}{3}}}$$

ويأجرء تكامل للدالة $\frac{ds}{dy}$ نحصل على :

$$\int 0.4 + \frac{1}{6}y^{\frac{2}{3}} dy$$

$$= 0.4y + \frac{1}{2}y^{\frac{1}{3}} + k$$

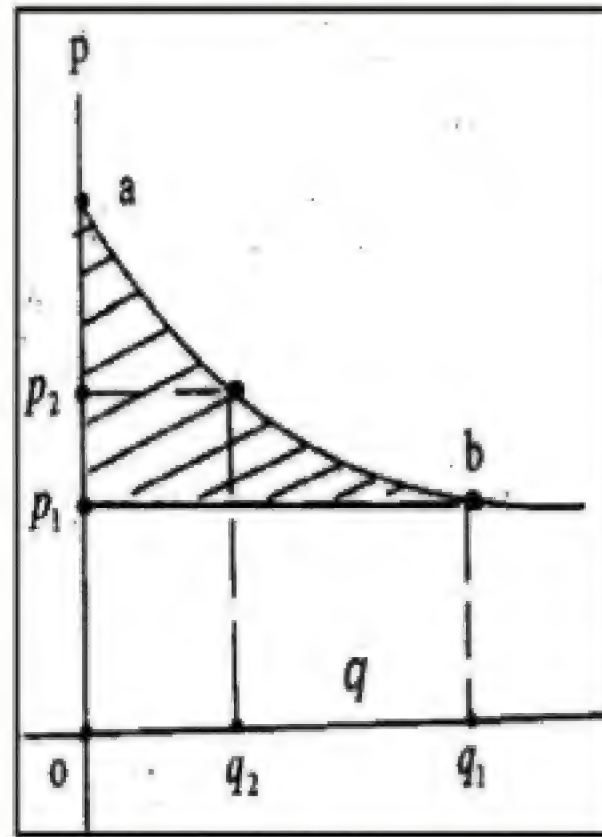
وحيث أن $c = 24$ عندما $y = 0$ لذلك تكون $k = 24$ وبذلك تصبح دالة الاستهلاك بالصيغة الآتية :

$$c = 24 + 0.4y + \frac{1}{2}y^{\frac{1}{3}}$$

7-2 فائض المستهلك Consumer Surplus

يقصد بفائض المستهلك (cs) الفرق بين مقدار النقود التي أعدها الفرد كي يدفعها مقابل كمية من سلعة معينة ومقدار النقود التي دفعها فعلاً. ومبعث ذلك: إن الفرد يحتفظ في ذهنه دائماً بسعر (تَمَن) معين يرغب بدفعه لقاء اقتناء سلعة من غير أن يعود من السوق بدون شرائها. ولهذا فإن درجة الإشباع التي تقاس بالسعر الذي يرغب الفرد بدفعه هي عموماً أكبر من السعر الذي يدفعه في السوق فعلياً.

ولما كان المستهلكون يختلفون في تقييمهم لدرجة الإشباع المستحصلة من سلعة معينة مثل (q) لذلك يرغب المستهلكون بدفع أسعار مختلفة عن السلعة المذكورة مما يؤدي إلى رفع منحني الطلب في السوق وهذا ينشأ عندما يكون هناك مستوى طلب معين على السلعة (q) ولنقل انه q_2 فإن هناك بعض الأفراد الذين يرغبون بدفع السعر p_2 لشراء السلعة المذكورة ، والبعض الآخر مستعدون لدفع أكثر من السعر p_2 ، كما في الشكل رقم (2-4) .



فعندما تباع كمية مقدارها q_1 من السلعة في السوق فإن مقدار فائض الإشباع لجميع المستهلكين هو المساحة $a b p_1$ مع الإشارة إلى أن النقطة a يمكن تحديدها عندما يكون $q = 0$ ولهذا فإن الإشباع يمكن قياسه بلغة السعر لجميع المستهلكين المعنيين بشرائها.

مذكرين إلى أن المساحة $a b p_1$ كان قد تناولها ألفريد مارشال¹، وأسمّاها بفائض المستهلك وقد سبقه المهندس الفرنسي (A.J. Dupuit) (1804-1866) في الإشارة إليه. أن صيغة فائض المستهلك تظهر بالشكل التالي.

$$(2-14) \quad cs = \int_0^{q_1} f(q) dq - q_1 p_1 \quad \text{يساوي:}$$

(¹) ألفريد مارشال (Alfred Marshall) (1842-1924) اقتصادي إنكليزي درس الرياضيات وبعد ذلك اتجه لداسة الاقتصاد وأهم بحوثه تطوير المفاهيم الاقتصاد الجزئي التي لازالت ذات قيمة عالية في مبادئ الاقتصاد، وداسات أخرى في القيمة والنقد والتجارة وغيره.

التكامل وتطبيقاته الاقتصادية

حيث أن $f(q)$ هي دالة الطلب ويظهر فائض المستهلك بمجرد إجراء التكامل و الحصول على المساحة تحت المنحنى بين $(0, q_1)$ ومن ثم طرح المساحة التي تمثل قيمة الكمية من السلعة المشتراة فعلاً من ذلك والمتمثلة بالشكل oq_1bp_1 واختصار (q_1, p_1) .

مثال (1):

إذا أعطيت دالة الطلب على سلعة معينة بالصيغة الآتية:-

$$p = 20 - 2q$$

جد فائض المستهلك عندما : $p_1=4$

الجواب :

لاستخراج الحل نلاحظ أولاً ما يأتي :

حيث أن $p_1=4$ لذلك فإن :

$$p_1 = 20 - 2q_1$$

$$4 = 20 - 2q_1$$

$$\therefore q_1 = 8$$

فائض المستهلك يساوي :

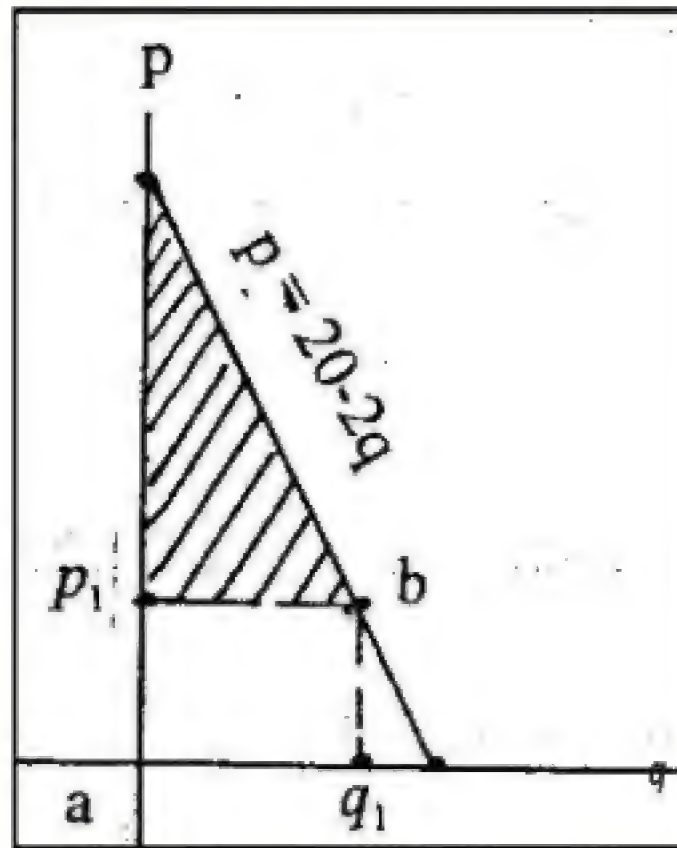
$$cs = \int_0^8 (20 - 2q) dq - q_1 p_1$$

$$= 20q - q^2 \Big|_0^8 - (8)(4)$$

$$= [20(8) - (8)^2 - (0)] - 32$$

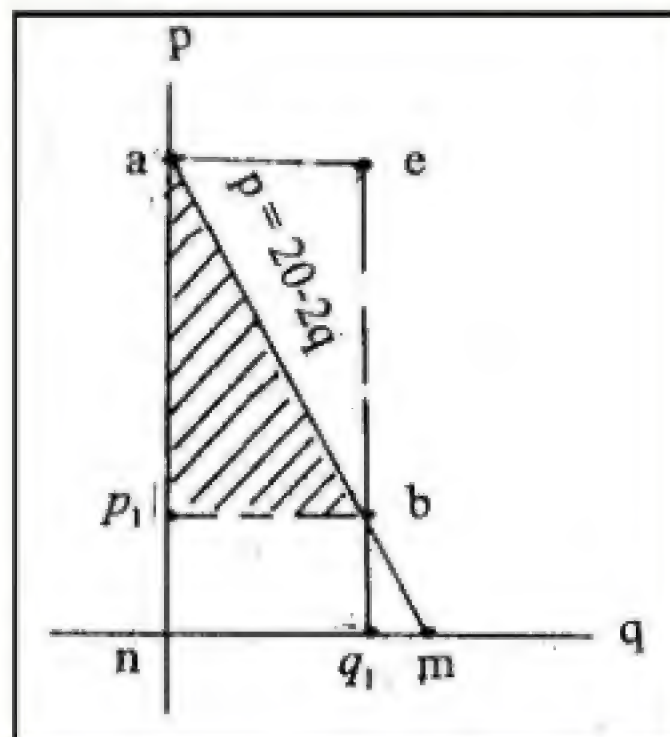
$$cs = 64$$

كما يظهر في الشكل رقم (2-5)



شكل رقم (2-5)

ويمكن الحصول على فائض المستهلك في المثال أعلاه هندسياً مستفيدين من العلاقة الخطية لمعادلة الطلب فعند إعادة رسم الشكل البياني بعد إجراء بعض الإضافات التي تسهل العمل كما في الشكل رقم (2-6).



شكل رقم (2-6)

ومن الشكل أعلاه يلاحظ أن فائض المستهلك هو المساحة المظللة والتي تغطي المثلث $a - b - p_1$ وهذه المساحة تساوي:

$$CS = \Delta a - b - p_1$$

وحيث أن: $a - b - p_1$ يمكن استخراجه في ضوء المعلومات المعطاة وهي:

$$an = 20 - 2(0) = 20$$

عندما: $q = 0$ في معادلة الطلب.

ولما كانت: $np_1 = 4$

$$\therefore ap_1 = 20 - 4 = 16$$

كما لدينا:

$$nq_1 = p_1 b = 8$$

$$\therefore \Delta a - b - p_1 = \frac{1}{2}(p_1 b)ap_1$$

$$= \frac{1}{2}(8)16$$

$$\therefore CS = 64$$

وهي نفس النتيجة.

مثال (2):

إذا كانت دالة الطلب بالصيغة الآتية :-

$$p = 39 - q^2$$

جد فائض المستهلك إذا كانت: $q_1 = \frac{5}{2}$.

الحل:

$$q_1 = \frac{5}{2}$$

$$\therefore p_1 = 39 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= \frac{131}{4}$$

= فائض المستهلك

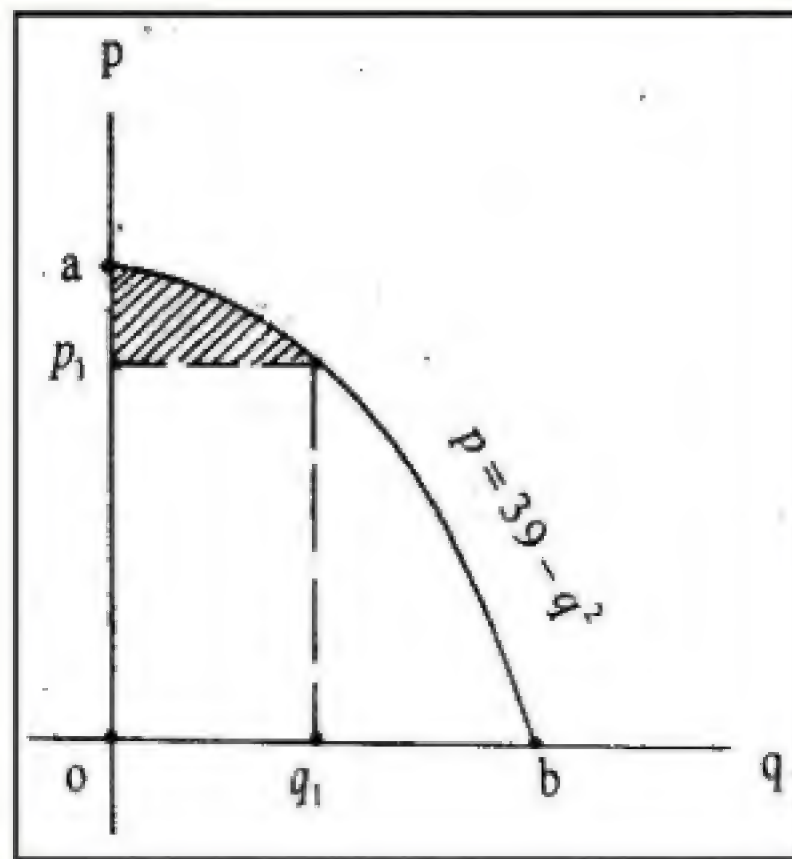
$$cs = \int_0^{\frac{5}{2}} (39 - q^2) dq - \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{131}{4}\right)$$

$$= 39q - \frac{1}{3}q^3 \Big|_0^{\frac{5}{2}} - \frac{655}{8}$$

$$= 39\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^3 - (0) - \frac{655}{8}$$

$$\therefore cs = \frac{195}{2} - \frac{125}{24} - \frac{655}{8} = \frac{250}{24}$$

كما في الشكل (2-7)



الشكل رقم (2-7)

مثال (3) :

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة بالصيغة الآتية :-

$$p = 45 - 2q - q^2$$

جد فائض المستهلك إذا كانت $q_1 = 5$.

الجواب:

حيث أن $q = 5$

$$\begin{aligned} \therefore p_1 &= 45 - 2(5) - (5)^2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

والآن : فائض المستهلك يساوي:

$$\int_0^q f(q) dq - q_1 p_1$$

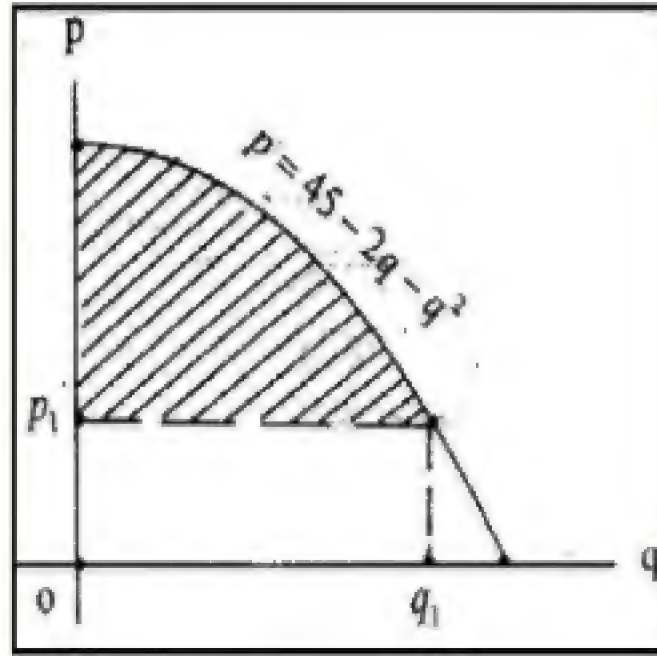
$$CS = \int_0^5 (45 - 2q - q^2) dq - (5)(10)$$

$$= \int_0^5 45q - q^2 - \frac{1}{3}q^3 \Big|_0^5 - 50$$

$$= 45(5) - (5)^2 - \frac{1}{3}(5)^3 - 50$$

$$\therefore CS = \frac{325}{3} = 108.3$$

كما في الشكل رقم (2-8) :



شكل رقم (2-8)

مثال (4) :

وجد أن دالة الطلب على سلعة معينة بالصيغة الآتية :-

$$p = 36 - q^2$$

احسب فائض المستهلك إذا كانت السلعة حرة أي بلا مقابل أي أن $p = 0$

الجواب :

$$\text{إذا كان } p_1 = 0 \text{ فإن } q_1 = \sqrt{36} = 6$$

والآن : فائض المستهلك يساوي :

$$cs = \int_0^6 (36 - q^2) - (6)(0)$$

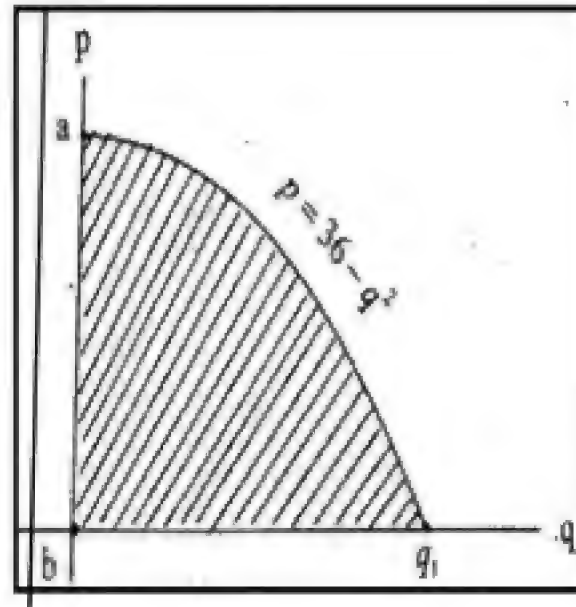
$$= 36q - \frac{1}{3}q^3 \Big|_0^6 - (0)$$

$$= 36(6) - 72$$

$$\therefore cs = 144$$

ويبدو واضحاً أن المساحة تحت المنحنى برمتها هي فائض المستهلك والمحددة

بـ (a, b, q) وذلك لكون البضاعة بلا مقابل (مجانياً) كما موضح في (2-9) أدناه.



شكل رقم (2-9)

ملاحظة:

في سوق الاحتكار حيث يتحكم المنتج في السوق فيقوم بتحديد الكميات المعروضة والسعر الذي يحقق له أقصى الأرباح وفي سوق كهذا إذا كانت دالة الطلب معروفة فبالإمكان حساب فائض المستهلك إذا كانت التكاليف الحدية للمنتج معروفة.

مثال (5):

تحدد الكميات المباعة والسعر في ظل سوق الاحتكار بدالتي الطلب والتكاليف الحدية الآتيتين :-

$$p = 12 - q^2$$

$$\frac{dp}{dq} = 4 + 2q$$

على التوالي والمطلوب حساب فائض المستهلك.

الجواب:

تتحقق أقصى الأرباح عندما $MR = MC$ وحيث أن العائدات الحدية (MR) يمكن اشتقاقها من دالة

الطلب كالآتي :

$$R = q(12 - q^2)$$

$$= 12q - q^3$$

$$\therefore MR = \frac{dR}{dq} = 12 - 3q^2$$

$$MR = MC : \text{والآن}$$

$$12 - 3q^2 = 4 + 2q$$

$$3q^2 + 2q - 8 = 0$$

$$(3q - 4)(q + 2)$$

$$q = \frac{4}{3}$$

$$\text{أو: } q = -2 \text{ نهمل}$$

ولهذا فإن :

$$p_1 = \frac{92}{9}, q_1 = \frac{4}{3}$$

والآن فائض المستهلك يساوي :

$$CS = \int_0^{\frac{4}{3}} (12 - q^2) dq - \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{92}{9}\right)$$

$$= 12q - \frac{1}{3}q^3 \Big|_0^{\frac{4}{3}} - \frac{368}{27}$$

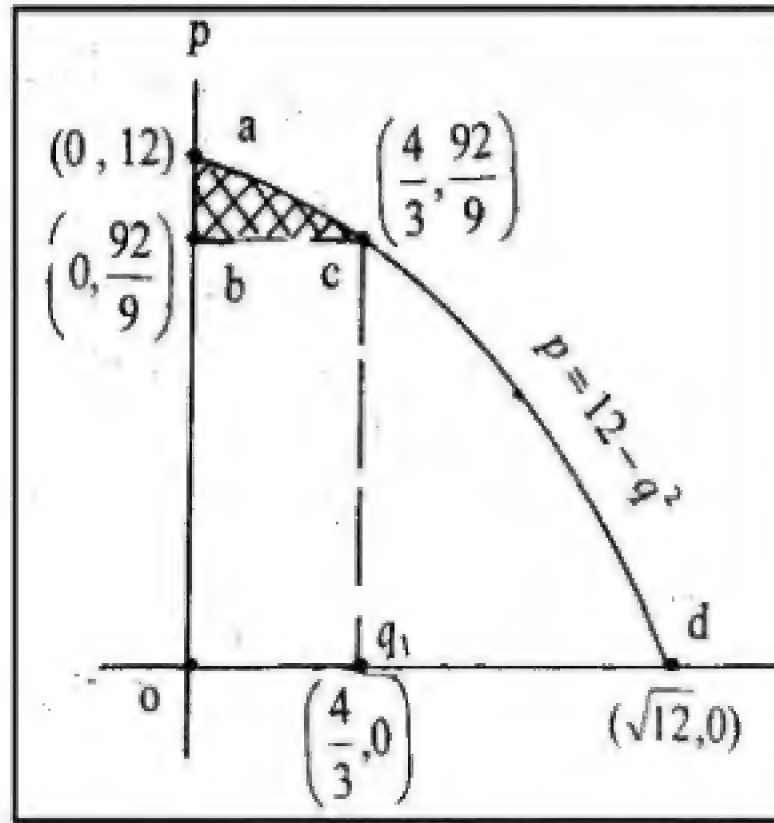
$$= 12\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^3 - \frac{368}{27}$$

$$= \frac{48}{3} - \frac{64}{81} - \frac{368}{27}$$

$$= \frac{128}{81}$$

$$\therefore CS \approx 1.58$$

كما موضح في الشكل رقم (2-10)



شكل رقم (2-10)

8-2 فائض المنتج Producer's Surplus

ذكرنا فيما سبق بأن دالة العرض $p = f(q)$ تبين مقدار الكميات التي تجهز من سلعة معينة عند مستويات مختلفة من الأسعار وإذا كانت الكميات المجهزة من تلك السلعة مقابل السعر p_1 هي q_1 فإن المنتجين الذين كانوا قد خططوا لتجهيز السلعة أعلاه بسعر يقل عن سعر السوق (p_1) فائضاً يسمى فائض المنتج لأنهم عملياً سيبيعونها بسعر أكثر من السعر الذي خططوا له .
وما يحققه المنتجون من (فائض المنتج) يمكن حسابه عن طريق استخراج قيمة المساحة فوق منحنى العرض وتحت الخط $p = p_1$ وتقدر هذه المساحة رياضياً بالصيغة الآتية:

$$ps = q_1 p_1 - \int_0^{q_1} f(q) dq = \text{فائض المنتج يساوي}$$

حيث أن دالة العرض هي $p = f(q)$

مثال (1):

إذا كانت دالة العرض لسلعة معينة في السوق هي :-

$$p = 4 + q^2$$

وكان السعر مثبت عند : $p_1 = 20$

جد فائض المنتج .

الجواب:

حيث أن :

$$p_1 = 20$$

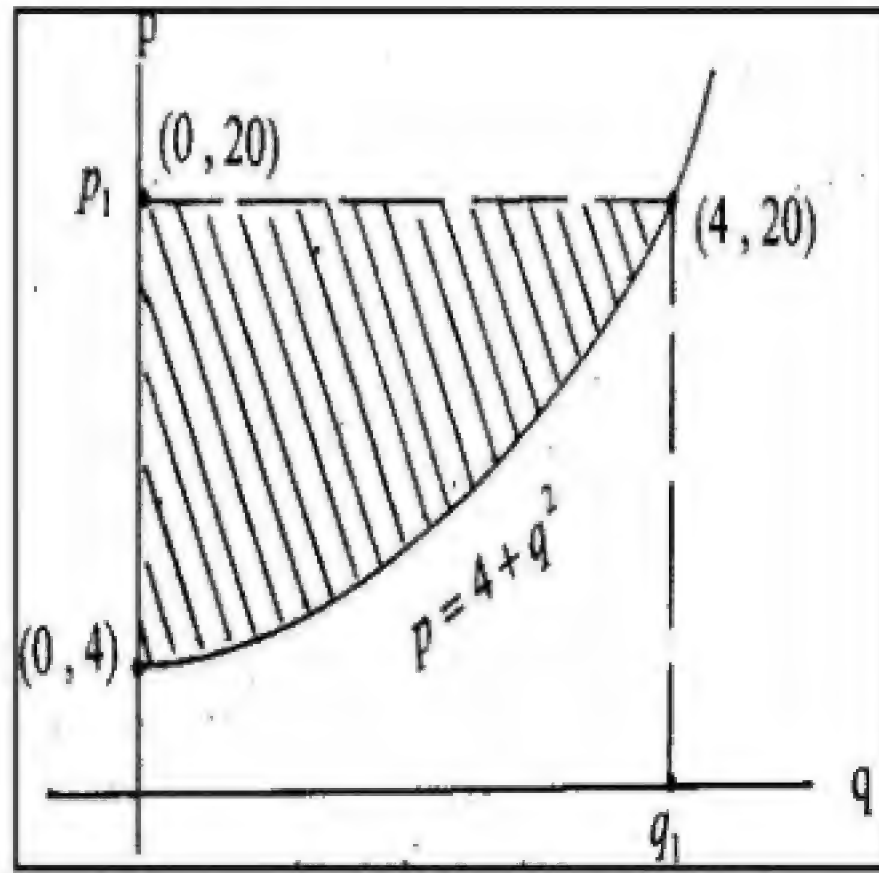
$$\therefore q_1 = \sqrt{20 - 4}$$

$$q_1 = 4$$

فائض المنتج :

$$\begin{aligned} ps &= q_1 p_1 - \int_0^{q_1} f(q) dq \\ &= (4)(20) - \int_0^4 (4 + q^2) dq \\ &= 80 - \left(4q + \frac{1}{3}q^3 \right) \Big|_0^4 \\ &= 80 - \left(16 + \frac{64}{3} \right) - (0) \\ \therefore ps &= \frac{128}{3} \end{aligned}$$

كما مبين في الشكل رقم (2-11) :



شكل رقم (2-11)

مثال (2):

تحدد الكميات المطلوبة والأسعار المناظرة لها في ظل سوق المنافسة التامة بدائي الطلب والعرض

التاليين :

$$P = 24 - q^2$$

$$P = 6 + 3q$$

على التوالي . جد فائض المنتج المتحقق .

الجواب :

يتحقق توازن السوق عندما : الطلب = العرض أي أن :

$$24 - q^2 = 6 + 3q$$

$$q^2 + 3q - 18 = 0$$

$$(q + 6)(q - 3) = 0$$

$$q = 3 \text{ أو } q = -6 \text{ (نهمل)}$$

إذن يتحقق توازن السوق عندما : $q_1 = 3$

$$p_1 = 24 - (3)^2 = 15 \text{ و}$$

والآن : فائض المنتج :

$$ps = (3)(15) - \int_0^3 (6 + 3q) dq$$

$$= 45 - \left(6q + \frac{3}{2}q^2 \right)_0^3$$

$$= 45 - \frac{63}{2}$$

$$\therefore ps = \frac{27}{2}$$

ويمكن الاستفادة من العلاقة الخطية لدالة العرض في حساب فائض المنتج هندسياً حيث يلاحظ أن

المساحة المحددة بـ $\int_0^3 (6 + 3q) dq$ ما هي إلا مساحة شبه المنحرف (maq_1o) والتي تساوي :

$$maq_1o = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

حيث أن : h = الارتفاع = 3

b_1 = القاعدة الأولى = 6

b_2 = القاعدة الثانية = 15

$$\therefore maq_1o = \frac{1}{2}(3)(6 + 15)$$

$$= \frac{3}{2}(21)$$

$$= \frac{63}{2}$$

وحيث أن فائض المنتج p_1am ويساوي :

$$p_1ap_1o - maq_1o$$

$$p_1aq_1o = 15(3) = 45 \quad \text{وإن :}$$

$$\therefore ps = 45 - \frac{63}{2} = \text{فائض المنتج}$$

$$= \frac{27}{2} \quad (\text{وهي نفس النتيجة})$$

أو يمكن حساب فائض المستهلك كونه مساحة Δp_1am والتي تساوي :

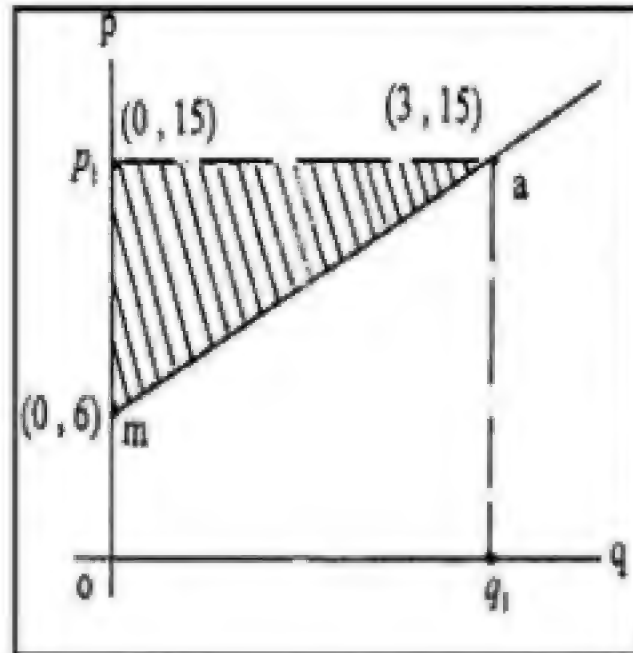
$$p_1m.p_1a \Delta p_1am = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(15 - 6)3$$

$$= \frac{27}{2}$$

$$\therefore ps = \frac{27}{2}$$

كما مبين في الشكل رقم (2-12):



شكل رقم (2-12)

مثال (3):

في سوق المنافسة التامة لسلعة ما كانت دالة الطلب ودالة العرض على التوالي كالآتي:-

$$p = 20 - 3q^2$$

$$p = 2q^2$$

احسب فائض المستهلك وفائض المنتج.

الجواب:

توازن السوق يتحقق عندما يكون: الطلب = العرض كما موضح في أدناه:-

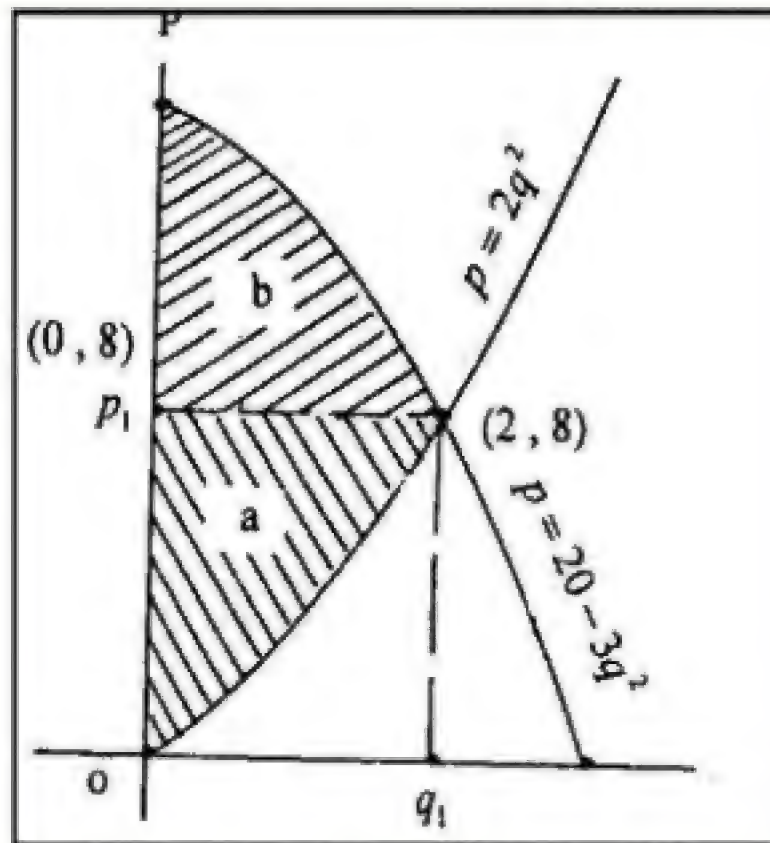
$$20 - 3q^2 = 2q^2$$

$$5q^2 - 20 = 0$$

$$5(q^2 - 4) = 0$$

$$\therefore q_1 = 2, \quad p_1 = 8$$

والآن دعنا نلاحظ الشكل رقم (2-13) أولاً:



شكل رقم (2-13)

ثم نحسب فائض المنتج :-

فائض المنتج :

$$\begin{aligned} ps &= (2)(8) - \int_0^2 (2q^2) dq \\ &= 16 - \frac{2}{3} q^3 \Big|_0^2 \\ &= 16 - \frac{2}{3} (2)^3 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

وهي المساحة (a) الموضحة في الشكل (2-13)

أما فائض المستهلك :

$$\begin{aligned} cs &= \int_0^2 (20 - 3q^2) dq - (2)(8) \\ &= 20q - q^3 \Big|_0^2 - 16 \\ &= 20(2) - (2)^3 - (0) - 16 \\ \therefore cs &= 16 \end{aligned}$$

وهي المساحة (b) الموضحة في الشكل (2-13)

9-2 القيمة الحالية Present Value

يعتبر مفهوم القيمة الحالية للنقود مفهوما أساسيا في نظرية رأس المال وتحليلات الاستثمار .

ويقصد بهذا المفهوم حساب القيمة الحالية أو القيمة المخصومة لمبلغ معين من المال الذي سيتوفر في المستقبل ، ولتوضيح ذلك لنأخذ الفرضية الآتية :-

إذا كان معدل الفائدة السائدة (I) في المائة فإن القيمة الحالية (y) لمبلغ من المال يتوفر بعد

سنة من الآن ويرمز له بـ (a) تكون كالآتي :

$$(2-9) \quad y = \frac{a}{1+i}$$

ويمكن كتابة المعادلة كالآتي :

$$a = y(1+i)$$

وواضح من المعادلة أعلاه أن القيمة المستقبلية تساوي قيمة المال الحالية مضافا إليها الفائدة التي يستحقها هذا المال لمدة سنة واحدة أي (yi) ، أما إذا أردنا أن نحسب القيمة الحالية لمال معين حسب العلاقة (2-9) قيمته بعد (t) من السنوات من الآن فإن العلاقة المذكورة تصبح :

$$(2-10) \quad y = \frac{a}{(1+i)^t}$$

ويشار في بعض الأحيان إلى (y) بأنها القيمة المخصومة للمبلغ (a) وإذا ما كانت الفائدة تدفع (n) من المرات في السنة وليس مرة واحدة ، فإن العلاقة (2-10) تعاد كتابتها كالآتي :

$$(2-11) \quad y = \frac{a}{\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}}$$

حيث أن الفائدة التي تضاف لكل جزء من السنة هي (i/n) وتحسب على أساس الفائدة السنوية مقسومة على عدد الفترات الجزئية (n) في السنة وبذلك تصبح فترة الخصم (nt) أي عدد أجزاء السنة مضروبة في عدد سنوات الخصم . ولنفترض الآن بأن الفائدة تضاف بشكل مستمر وليس بشكل متقطع في نهاية كل فترة لهذا فإن (n) ستزداد بلا حدود ولغرض حساب القيمة الحالية في العلاقة (2-11) بصيغتها المستمرة نعيد كتابة المقدار $\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$ كما يأتي :

$$(2-12) \quad \left[\left(1 + \frac{i}{n} \right)^n \right]^u$$

وسعيًا للاختصار لتكن $(k = \frac{n}{i})$ وعلى هذا الأساس يصبح المقدار أعلاه كما يلي:

$$(2-13) \quad \left[\left(1 + \left(\frac{1}{k} \right)^k \right)^u \right]$$

وكما مر بنا سابقاً أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

وهي نفس e المستخرجة من المقدار $\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k$ وحيث أن $k \rightarrow \infty$ عندما $n \rightarrow \infty$ وبذلك

يمكن إعادة كتابة العلاقة (2-13) كالآتي: e^u وعلى أساسها تصبح العلاقة (2-11) كالآتي :

$$(2-14) \quad y = \frac{a}{e^u} = ae^{-u}$$

ومن المبادئ الأخرى لنظرية رأس المال وتحليلات الاستثمار ذلك المبدأ الذي يعني بالقيمة الحالية

لتدفقات المداخيل المستقبلية a_1, a_2, \dots, a_n حيث يمكن تحديد قيمة رأس المال L (١) من المداخيل

المستقبلية a_t ($t=1,2,\dots,n$) بالمعادلة الآتية :

$$(2-15) \quad y = \sum_{t=1}^n \frac{a(t)}{(1+i)^t}$$

وعلى افتراض أن سعر الفائدة (i) يبقى ثابتاً خلال الفترة الزمنية المعنية. ومن العلاقة (2-11)

والعلاقة (2-14) وبافتراض أن الفائدة تضاف باستمرار يمكن كتابة العلاقة (2-15) لـ (n) من الفترات

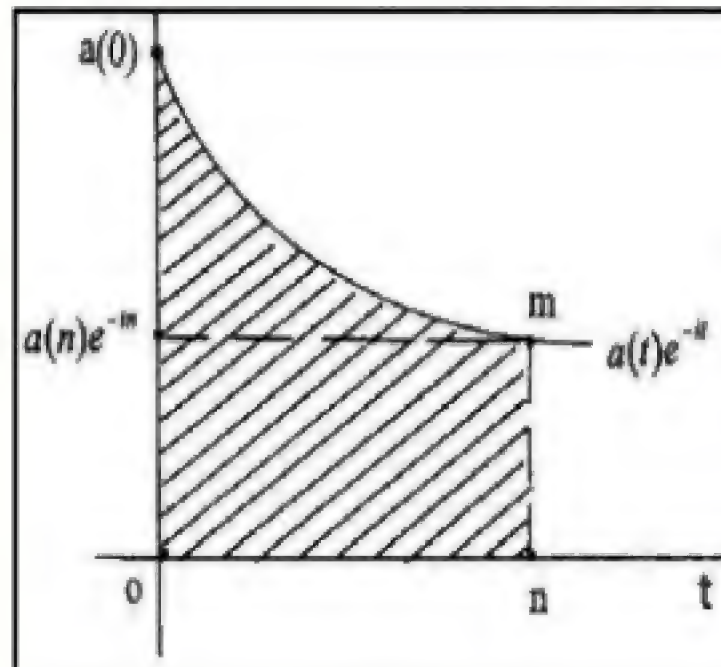
الزمنية كالآتي:-

القيمة الحالية تساوي :

$$(2-16) \quad pv = \int_0^n a(t) e^{-it} dt$$

$$= a(t) \int_0^n e^{-it} dt$$

حيث تشير $a(t)$ إلى دالة مستمرة للزمن (t) ويبدو الفرق واضحاً بين حساب القيمة الحالية لمجموع أموال تتوفر خلال (n) من الفترات الزمنية مستقبلاً اعتباراً من الآن وبالصيغة $a(n)e^{-in}$ والقيمة الحالية لتدفقات مستمرة من الأموال المستقبلية خلال (n) من الفترات الزمنية والشكل رقم (2-14) يوضح لنا الفرق بين الحسابين حيث يظهر الحساب الأول كإحداثي عند النقطة $t = n$ أما الحساب الثاني فهو المساحة تحت المنحنى الميمنة في الشكل (2-14) .



شكل رقم (2-14)

مثال (1):

يتناقص تدفق تيار من الدخل باستمرار عبر الزمن وذلك وفق نسبة هي $100e^{-3t}$ سنوياً وخلال (n) من السنوات من الآن . ضع صيغة رياضية لحساب قيمة رأس المال الذي يمثل هذه التدفقات من الدخول من الآن وحتى (100) سنة إذا كانت نسبة الفائدة 5% سنوياً وتحتسب مرة في السنة.

الجواب

$$pv = y = \int_0^n a(t)e^{-it} dt \quad \text{القيمة الحالية تساوي}$$

وحيث أن رأس المال $a = 5\%$, $i = 100$, $n = 100$

$$\therefore pv = 100 \int_0^{100} e^{-3(0.05)t} dt$$

$$= 100 \int_0^{100} e^{-0.15t} dt$$

ومن التطبيقات المهمة للقيمة الحالية هو استخراج قيمة الأرض بمقارنتها بسعر الفائدة السائد

وذلك باستخدام الصيغة الآتية :

$$(2-17) \quad LV = \frac{R}{i} \quad \text{قيمة الأرض تساوي}$$

حيث أن (LV) تشير إلى قيمة الأرض و (R) إلى الإيجار الذي يحصل عليه صاحب الأرض أما (i)

(فهو سعر الفائدة السائد في السوق . ويمكن تكييف العلاقة (2-17) لتقرب من مفهوم العلاقة (2-16)

وكما يأتي :

$$(2-18) \quad LV = \int_0^{\infty} R e^{-it} dt$$

ويشير (R) هنا إلى الإيجار الذي يستلمه صاحب الأرض في كل فترة زمنية ولكن بما أن إيجار الأرض

يمتد لفترة غير محددة (∞) لأن الأرض لا تتدثر لذلك فإن العلاقة (2-18) تؤول مرة ثانية إلى $\frac{R}{i}$ إذا ما

أكملنا عمليات التكامل عليها وكما يلي :

$$R \int_0^{\infty} e^{-it} dt = R \left[-\frac{1}{i} e^{-it} \right]_0^{\infty} = R \left(0 + \frac{1}{i} \right) = \frac{R}{i}$$

دعنا نأخذ مثالا على ذلك :

مثال:

تدر قطعة ارض دخلاً إيجارياً ثابتاً قدره (120) وحدة نقدية في السنة . ما هي قيمة الأرض إذا كان معدل سعر الفائدة 6% سنوياً .

الجواب:

$$\begin{aligned}Lv &= \frac{R}{i} \\&= \frac{120}{0.06} \\&= 120 \left(\frac{100}{6} \right) \\&= 2000\end{aligned}$$

قانون بارينو في توزيع الدخل

Pareto's Law of Distribution of Income

10-2

الجزء الثالث

تناولنا في الفصل الثالث الفقرة (2-8) قانون بارينو في توزيع الدخل كمثال عن الدوال الأسية

وذكرنا بأن صيغة هذا القانون هي :

$$N = ax^{-b}$$

حيث أن (N) تمثل ذلك العدد من أفراد المجتمع الذي حجم سكانه (a) والذين تزيد دخولهم

عن (x) أما (b) فهي معلمة سكانية عادة ما تساوي (1.5) تقريباً.

وتقدم لنا عملية التكامل تطبيقاً مفيداً لهذا القانون بالإضافة إلى ما شرحناه سابقاً. ومن هذه

التطبيقات الصيغة التي نحدد لنا عدد مستلمي الدخل بين الدخل (y_1) والدخل (y_2) وحسب الصيغة

الآتية :

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} ax^{-b} dx &= a \left(\frac{1}{-b+1} \right) \left(\frac{1}{x^{b-1}} \right) \Bigg|_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{a}{-b+1} \left[x_2^{-b+1} - x_1^{-b+1} \right]\end{aligned}$$

مثال (1):

جد عدد الأفراد الذين تقع دخولهم بين (100-150) في مجتمع يبلغ عدد سكانه (5000000)

نسخة.

الجواب:

$$\begin{aligned}N_{100-150} &= \int_{100}^{150} 5000000 x^{-1.5} dx \\ &= \frac{5000000}{-1.5+1} \left[150^{-1.5+1} - 100^{-1.5+1} \right] \\ &= \frac{5000000}{-0.5} \left[150^{-0.5} - 100^{-0.5} \right] \\ &= -10000000 \left[\frac{1}{\sqrt{150}} - \frac{1}{\sqrt{100}} \right] \\ &= -10000000 \left[\frac{1}{12.25} - \frac{1}{10} \right] \\ &= 183674 \text{ فرداً}\end{aligned}$$

مثال (2):

ما عدد الذين تقع دخولهم بين (100-400) في المثال (1).

الجواب:

$$N_{100-400} = \int_{100}^{400} \frac{5000000}{-1.5+1} \left[400^{-1.5+1} - 100^{-1.5+1} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= -10000000 \left[\frac{1}{\sqrt{400}} - \frac{1}{\sqrt{100}} \right] \\
 &= -10000000 \left[\frac{1}{20} - \frac{1}{10} \right] \\
 &= 500000 \text{ فرداً}
 \end{aligned}$$

وقد يتطلب الأمر حساب حجم الدخل الذي يزيد عن حجم دخل معين ولنتناول في البداية التحليل الرياضي لهذه المسألة:
خذ قانون باريتو:

$$N = ax^{-b}$$

$$\text{والآن: } dN = a(-b)x^{-b-1}dx$$

$$\text{دع: } Ndx = -dN = abx^{-b-1}dx$$

حيث تشير dN هنا إلى تغير صغير في عدد السكان عندما يحدث تغيراً في مستوى الدخل. أي عندما يزداد مستوى الدخل ينخفض هذا العدد. ولهذا فإن مجموع الدخل عند حجم السكان عدده (x) يكون:

$$xNdx = abx^{-b}dx$$

لذلك فإن مجموع الدخل الذي يزيد عن (y) يكون:

$$\begin{aligned}
 Ty &= \int_y^{\infty} xNdx = \int_y^{\infty} abx^{-b}dx \\
 &= \frac{ab}{b-1} y^{1-b}
 \end{aligned}$$

مثال:

جد مجموع الدخل الذي يزيد عن (225) في مجتمع عدد سكانه (1500000) نسمة.

الجواب:

$$\begin{aligned}
 Ty &= \frac{ab}{b-1} y^{1-b} \\
 &= \frac{15000000(1.5)}{1.5-1} (225)^{1-1.5} \\
 &= 45000000 \left(\frac{1}{\sqrt{225}} \right) \\
 &= 45000000 \left(\frac{1}{15} \right) \\
 &= 3000000 \text{ وهو مجموع الدخل}
 \end{aligned}$$

تمارين (2-1)

1- إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة هي:

$$p = 25 - q^2$$

جد فائض المستهلك عندما $q = 4$

2- إذا أعطيت دالة طلب بالصيغة الآتية:

$$p = 6 + 2q^2$$

جد فائض المنتج إذا كانت $p_1 = 24$

3- قدرت دالتي الطلب والعرض في سوق معينة فوجدت كما يأتي:

$$p = 12 - q^2$$

$$p = 3 + 4q$$

على التوالي والمطلوب إيجاد كل من فائض المستهلك وفائض المنتج.

- 4- في إحدى الأسواق المحتكرة من قبل مجهز معين كانت الكميات المباعة والأسعار محددة بدالة الطلب: $p = 32 - q$ أما التكاليف الحدية فقد كانت:

$$\frac{dp}{dq} = 5 + \frac{1}{2}q$$

وذلك كخطة من المجهز لتحقيق أقصى الأرباح. والمطلوب إيجاد فائض المستهلك.

- 5- أعطت نتائج الدراسات في مشروع معين مؤشرات لدالة التكاليف الحدية (MC) والعائدات الحدية (MR) كما مبيّن أدناه.

$$MC = \frac{dc}{dp} = 12 - 3p - 3p^2$$

$$MR = \frac{dR}{dp} = 20 - 4p$$

جد مستوى الإنتاج الذي تتحقق عنده أقصى الأرباح مفترضين سيادة سوق المنافسة التامة.

- 6- في ظل سوق المنافسة التامة وجد أن دالتي العرض والطلب كانت:

$$p = 6 + 2q + \frac{1}{4}q^3$$

$$p = 21 - \frac{1}{3}q^2$$

المطلوب إيجاد فائض المستهلك وفائض المنتج.

- 7- أشارت البحوث التي جرت في مصنع معين أن دالة التكاليف الحدية للوحدة الواحدة المنتجة من السلعة (q) كانت.

$$MC = \frac{dc}{dq} = 0.6 - 0.9q^2$$

جد دالة التكاليف الكلية إذا علمت أن التكاليف الثابتة (40) وحدة.

8- كان مستوى العائدات الحدية في معمل للسجاد حسب الصيغة الآتية:

$$MR = \frac{dR}{dq} = 8 - 2q$$

جد دالة العائدات الكلية ودالة الطلب.

9- اقتنت شركة للكهرباء مولداً جديداً وقدرت عمره الإنتاجي بـ (8) سنوات وكان معدل الاندثار

يحسب بموجب المعادلة الآتية:

$$D = t^2 e' dt$$

استخرج مجموع المبالغ التي ينبغي رصدها في حسابات الشركة خلال الفترة أعلاه لتغطية كلفة

الاندثارات.

10- قدر الميل الحدي للاستهلاك في مجتمع معين بما يلي:

$$MPC = \int 0.65 + 4y^{1/3}$$

جد دالة الاستهلاك إذا كان مستوى الاستهلاك (15) عندما يكون مستوى الدخل القومي صفراً

11- بافتراض أن معدل الفائدة 4% وأن الفائدة تضاف إلى الرصيد كل ثلاثة أشهر، جد القيمة

الحالية لمبلغ (100) دينار يتوفر بعد ثلاثة سنوات من الآن.

الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية

Differential Equations

المعادلات التفاضلية

Differential Equations

المقدمة

1-3

تناولنا في الفصلين الرابع والخامس من الجزء الثاني التفاضل واستخداماته في التحليلات الكمية للظواهر الاقتصادية وقد لاحظنا أن كثير من العلاقات سواء كانت بين متغير وآخر أو بين مجموعة من المتغيرات تعرض عادة بشكل معدلات تبدل في متغير أو أكثر كدالة لمعدلات تبدل في متغيرات أخرى أو في قيم تلك المتغيرات ، فالمعدل الذي عنده يقترب السعر من مستوى التوازن يعتمد على التغيرات في كميات العرض وكميات الطلب .

وتعرض معدلات التغير (التبدل) عادة بصيغتين رياضيتين تعتمدان أساساً على الوقت فيما إذا كان مستمراً أو متقطعاً. فإذا كانت التغيرات مستمرة فمعدلات التغير تعالج كمشتقات تحتويها معادلات تسمى المعادلات التفاضلية.

الفصل

الثالث

أما إذا كانت التغيرات متقطعة في نقاط معينة من الوقت أو كونها متوسط تغيرات عبر فترة من الزمن ، فإن معادلات التغير تعالج هنا كفروقات في قيم المتغيرات عند نقاط مختلفة من الزمن وتسمى المعادلات التي تعالج هذه الفروقات معادلات الشروق والتي سنأتي عليها في فصل لاحق .

ويظهر مما سبق أن المعادلات التفاضلية ما هي إلا نهاية معادلات الفروق عندما تقترب الفترة الزمنية أو متوسط التغير في المعادلات الأخيرة من الصفر .

تعريف

2-3

اتضح من خلال المقدمة القصيرة أعلاه بأن المقصود بالمعادلة التفاضلية هي المعادلة التي تتضمن مشتقات أو تفاضلات دوال ذات متغير واحد أو أكثر وتصنف المعادلات التفاضلية طبقاً لنوع الدرجة والرتبة كالآتي :

أ- المعادلة التفاضلية الاعتيادية Ordinary Differential Equation

وهي المعادلة التفاضلية التي تتضمن مشتقات لدالة مجهولة بالنسبة لمتغير مستقل واحد .

ب- المعادلة التفاضلية الجزئية Partial Differential Equation

وهي المعادلة التفاضلية التي تتضمن مشتقات جزئية لمعادلة مجهولة ذات متغيرين مستقلين أو

أكثر .

ويقال للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة (n) إذا كانت أعلى مشتقة ظهرت في المعادلة هي المشتقة

(n) . إما درجة المعادلة التفاضلية فتحدد من خلال أعلى قوة مرفوعة إليها أعلى رتبة للمشتقة التي ظهرت في المعادلة.

أمثلة

حدد نوع المعادلة ودرجتها في المعادلات التفاضلية الآتية :

$$\text{أ- } \frac{dy}{dx} = 5x$$

$$\text{ب- } y = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\text{ج- } \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 = 9 + y^2$$

$$\text{د- } xdx + ydy = 0$$

$$\text{هـ- } \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} = y$$

$$\text{و- } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2y \quad \text{ز}$$

الجواب :

أ- $\frac{\partial y}{\partial x} = 5x$ معادلة تفاضلية اعتيادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى.

ب- $y = \frac{d^2y}{dx^2}$ معادلة تفاضلية اعتيادية من المرتبة الثانية والدرجة الأولى .

ج- $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 9 + y^2$ معادلة تفاضلية اعتيادية من المرتبة الأولى والدرجة الثالثة.

د- $xdx + ydy = 0$ معادلة تفاضلية اعتيادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى.

هـ- $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} = y$ معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى .

الفصل

و- $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0$ معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية والدرجة الأولى .

الثالث

ز- $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2y$ معادلة تفاضلية اعتيادية من المرتبة الثانية والدرجة الثانية

ويظهر واضحاً من الأمثلة أعلاه أن المعادلة التفاضلية الاعتيادية يمكن كتابتها بصيغتين :

الأولى الصيغة التفاضلية والثانية صيغة المشتقة فالصيغة $\frac{dy}{dx} = 4x$ هي صيغة المشتقة ، أما إذا

كتب بالصيغة $dy=4xdx$ فهي الصيغة التفاضلية .

تحل المعادلة التفاضلية الاعتيادية عن طريق تحويلها إلى دالة لا تحتوي على مشتقات أو تفاضلات تفي بمتطلبات المعادلة التفاضلية. ويمكن لهذا الحل أن يكون دالة صريحة أو ضمنية وعلى هذا الأساس فإن :

أ- الحل العام لمعادلة تفاضلية ذات المرتبة (n) هو الحل الذي يحتوي على (n) من الثوابت العشوائية المستقلة لعملية التكامل .

ب- الحل الخاص لمعادلة تفاضلية هو الحل الذي يؤخذ من الحل العام وذلك بإعطاء قيم محددة للثوابت العشوائية التي ظهرت في الحل العام .

ولما كانت ثوابت التكامل للمعادلة التفاضلية تحدد بالشروط الابتدائية أو شروط الحدود .

فالشروط التي تأخذ صيغة $(x = x_0)$ عندما $y = y_0$ تسمى بشروط الحدود (boundary conditions)

أما الحالة الخاصة من هذه الشروط التي تأخذ صيغة $(x = x_0)$ عندما $y=0$ فتسمى بالشرط الابتدائي.

وهكذا يظهر لنا أن حل المعادلة التفاضلية يحتاج إلى إجراء عملية التكامل لها وعندما تكون هناك

حاجة للحل الخاص لا بد من إيجاد الحل العام والحصول على معلومات حول الثوابت من خلال الشروط الابتدائية للمسألة.

دعنا نتناول بعض الأمثلة قبل الدخول في شرح طرق الحلول :

مثال (1)

بين بأن $y = x^2 - x + c$ هو حل للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} + 3 = 2x + 2$$

الجواب

إذا أخذنا $y = x^2 - x + c$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1$$

والآن نعوض قيمة $\frac{dy}{dx}$ بما يقابلها في المعادلة التفاضلية فينتج :

$$2x-1+3=2x+2$$

$$2x+2=2x+2$$

$$\therefore y = x^2 - x + c$$

(هو الحل)

مثال (2) :

برهن على أن الدالة الآتية هي حل للمعادلة التفاضلية المبينة أدناه :

$$y = x^3 - 2x^2 + c \text{ : الدالة}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x \text{ : المعادلة التفاضلية}$$

الجواب :

نأخذ مشتقة الدالة y فنحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ إذن الدالة } y \text{ هي حل للمعادلة التفاضلية}$$

مثال (3) :

اثبت أن الدالة $x^2 - cy = c^2$ هي حل للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} = 2y\frac{dy}{dx} + 4x$$

الجواب :

نأخذ الدالة ونعيد الصياغة لتصبح كالآتي :

$$y = \frac{x^2}{c} - c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{c}$$

ونعيد كتابة المعادلة التفاضلية كالآتي :

$$x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2y \frac{dy}{dx} = 4x$$

والآن نعوض فنحصل على :

$$x \left(\frac{2x}{c} \right)^2 - 2 \left(\frac{x^2}{c} - c \right) \left(\frac{2x}{c} \right) = 4x$$

$$\frac{4x^3}{c^2} - \frac{4x^3}{c^2} + \frac{4cx}{c} = 4x$$

$$4x = 4x$$

$$\therefore y = x^3 - 2x^2 + c$$

(وهو الحل للمعادلة التفاضلية)

حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى

Solution of differential Equations of the first order and first degree

4-3

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية ذات المرتبة الأولى والدرجة الأولى بالصيغة الآتية :

$$(3-1) \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

أو تكتب بالصيغة التفاضلية الآتية :

$$(3-2) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

ونشير إلى أن الصيغة (3-1) يمكن أن تحل باستخدام طرق التفاضل الاعتيادية إذا $F(x,y)$ ثابتة أو دالة فقط لـ x أما إذا كانت $F(x,y)$ دالة للمتغيرين (x,y) فنحتاج إلى الطرق التي سنأتي عليها لإيجاد حل للمعادلة التفاضلية المعنية .

وبلاحظ في المعادلة (3-1) أن y هو المتغير المعتمد و x المتغير المستقل ولهذا فإن الحل يوضع بصيغة y دالة x بالإضافة إلى ثابت عشوائي. أما في المعادلة (3-2) فإن العلاقة بين (x,y) علاقة ضمنية ولهذا يبقى اختيار أي منهما المتغير المعتمد وأي منهما المتغير المستقل حسب الحاجة .

أما طرق حل المعادلات التفاضلية من أية درجة أو مرتبة يعتمد على دقة تصنيفها بشكل صحيح .
والآن نستعرض حلول المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والمرتبة الأولى ويمكن توزيعها حسب نماذجها كالآتي:

1 - المعادلات التفاضلية المنفصلة Separable Differential Equations

وذلك عندما تكون M دالة فقط لـ x , N دالة لـ y في العلاقة (3-2) وبذلك فإن المعادلة تكتب بالصيغة الآتية :

$$\text{الفصل} \quad M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (3-3)$$

2- المعادلات التفاضلية المتجانسة Homogeneous Differential Equations

الثالث

وذلك عندما تكون N,M دالتين متجانستين بنفس الدرجة من التجانس .

3- المعادلات التفاضلية التامة Exact Differential Equations

إذا أخذنا المشتقة الكلية للدالة $F(x,y)$ كالآتي :

$$df(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

وعندها يكون للدالة التفاضلية (3-2) :

فهذا فإن المعادلة التفاضلية الآتية :

$$(3-4) \quad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

لها حل هو: $F(x, y) = C$ وتسمى حينئذ بالمعادلة التفاضلية التامة .

4- المعادلات التفاضلية الخطية

تكون المعادلة التفاضلية خطية إذا كان كل من الآتي من الدرجة الأولى :

$y, \frac{dy}{dx}$ أو $x, \frac{dx}{dy}$ وبذلك تكون في الصيغة الآتية :

$$(3-5) \quad \frac{dy}{dx} + yp(x) = Q(x)$$

$$(3-6) \quad \frac{dx}{dy} + xp(y) = Q(y) \text{ أو}$$

5- المعادلات التفاضلية الخطية في دالة y أو في دالة x

Differential Equation Linear In A Function Of y Or In A Function Of x

وذلك عندما تكون المعادلة من الدرجة الأولى في $f(y)$ and $\frac{d}{dy}f(y)$ أو في

$f(x)$ and $\frac{d}{dx}f(x)$ فإن المعادلة تأخذ الصيغة الآتية على التوالي :

$$(3-7) \quad \frac{d}{dy}f(y) + f(y)p(x) = Q(x)$$

أو

$$(3-8) \quad \frac{d}{dx}f(x) + f(x)p(y) = Q(y)$$

والآن سنتناول طرق حل هذه النماذج الخمسة من المعادلات التفاضلية تباعاً.

3-4-1 المعادلات التفاضلية المنفصلة

Separable Differential Equations

قلنا إذا كتبت المعادلة التفاضلية بالصيغة المبينة في (3-3) أي :

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

حيث أن M هي دالة لـ x فقط و N هي دالة لـ y فقط . وعند ذاك يكون المتغيران x, y منفصلين.

ويستخرج حل المعادلة التفاضلية بطريقة التكامل الاعتيادية المباشرة ولاحظ أن كل من dx, dy هما

تفاضلا للمتغيرين x, y على التوالي .

والآن لنأخذ بعض الأمثلة :

مثال (1) :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

واستخرج الحل الخاص إذا كانت $y=3$ عندما $x=0$

الجواب

نقسم طرفي المعادلة التفاضلية على y ونعيد كتابتها بصيغة تفاضلية فنحصل على:

$$\frac{1}{y} dy = 2x dx$$

الفصل

الثالث

والآن نكامل :

$$\ln y = x^2 + \ln c$$

لقد اخترنا $\ln c$ هنا ليكون ثابت مناسب ولكونه عشوائياً أي أن يكتب (c) بدلاً من $\ln c$ وينقل \ln

c إلى الطرف الآخر نحصل على :

$$\ln \frac{y}{c} = x^2$$

وهذا هو الحل العام وهو مكافئ للآتي :

$$y = ce^{x^2} \text{ أو } \frac{y}{c} = e^{x^2}$$

وبتعويض ما ورد بالشرط الأول : ($y = 3$ إذا كانت $x = 0$) نحصل على :

$$\frac{3}{c} = e^0$$

$$\frac{3}{c} = 1$$

$$\therefore c = 3$$

إذن الحل الخاص يكون :

$$\frac{y}{3} e^{x^2}$$

$$\therefore y = 3e^{x^2}$$

مثال (2) :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$xy + (1 + x^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

الجواب:

نعيد صياغة المعادلة التفاضلية بالخطوات التالية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{1+x^2}$$

ويضرب الطرفين بـ $\frac{dx}{y}$ ينتج :

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{x}{1+x^2} dx$$

وبإعادة الصياغة ينتج :

$$\frac{1}{y} dy + \frac{x}{1+x^2} dx = 0$$

والآن أصبحت المعادلة تفاضلية منفصلة أي ذات متغيرات منفصلة وبإجراء عملية التكامل لكل

منها ينتج :

$$\ln y + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = c$$

$$\ln(y\sqrt{1+x^2}) = c$$

$$\therefore y\sqrt{1+x^2} = c \quad (\text{وهو الحل العام})$$

باعتبار $c = e^c$ حيث أن c يمكن أن يكتب بأية صيغة مناسبة مادام هو ثابت عشوائي .

مثال (3)

في معاملات المرونة أظهرت إحدى الدراسات بأنه مرونة y بالنسبة إلى x هي الثابت b وكالاتي:

$$\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = b$$

جد y كدالة لـ x

الفصل

الجواب :

الثالث

يمكن إعادة صياغة المعادلة التفاضلية (معامل المرونة) :

$$\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = b \quad \text{بضرب المعادلة بـ } \frac{dx}{x} \text{ فينتج :}$$

$$\frac{1}{y} dy = b \frac{1}{x} dx$$

$$\ln y + c_1 = b \ln x + c_2$$

$$\ln y - b \ln x = c_3 \quad \text{حيث أن } c_1 + c_2 = c_3$$

$$\ln\left(\frac{y}{x^b}\right) = c_3$$

$$\therefore \frac{y}{x^b} = e^{c_3}$$

ويمكن وضع $e^{c_3} = c$ لأنه متغير عشوائي فينتج :

$$\therefore y = cx^b$$

3-4-2 المعادلات التفاضلية المتجانسة

Homogeneous Differential Equations

تسمى الدالة التفاضلية التي تكتب بالصيغة (3-2) أي :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

دالة متجانسة إذا كانت كل من $M(x, y), N(x, y)$ دوال متجانسة بنفس الدرجة في كل من

x, y .

(راجع الفقرة 1-17-5) التي أوضحت بأن الدالة $f(x, y)$ تكون دالة متجانسة من الدرجة

(λ) إذا وفقط إذا كانت $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ حيث أن λ هو أي ثابت.

وعندما تكون الدالة التفاضلية متجانسة فإن متغيراتها يمكن فصلها بالتعويض أي أن:

$$y = vx$$

$$(3-9) \quad dy = vdx + xdv$$

وبصورة متكافئة مع الصيغة أعلاه إذا كان $X=VY$:

فإن :

$$(3-10) \quad dx = vdy + ydv$$

وتكتب الدالة التفاضلية المستخرجة من (3-9) ، (3-10) على التوالي كالآتي:

$$(3-11) \quad M(x)dx + N(y)dy = 0$$

أو بالصيغة

$$(3-12) \quad M(y)dy + N(x)dx = 0$$

وتحل هذه المعادلات بطرق التكامل الاعتيادية ويستخرج الحل العام للمعادلة بصيغتها الأصلية

بطريقة تعويض قيم v المبينة أدناه :

$$v = \frac{x}{y} \text{ أو } v = \frac{y}{x} \text{ لغرض الوصول إلى حل المعادلة التفاضلية المنفصلة.}$$

مثال (1) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \text{ حل المعادلة التفاضلية الآتية:}$$

ثم جد الحل الخاص إذا : $y = 3$ عندما $x = 1$

الجواب :

الفصل

نحول المعادلة إلى الصيغة المذكورة في (9 - 3) كي تصبح متغيراتها منفصلة وذلك بالتعويض

الثالث

بالقيم الآتية :

$$y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

وقبل التعويض نعيد صياغة المعادلة المطلوب حلها بالمثل بالشكل الآتي :

$$x dy - y dx = 0$$

بالتعويض بالقيم أعلاه ينتج :

$$x(xdv + vdx) - vx dx = 0$$

$$x^2 dv + xv dx - vx dx = 0$$

$$\therefore x^2 dv = 0$$

وبالقسمة على x^2 ينتج :

$$dv = 0$$

والآن أصبحت المعادلة ذات متغير واحد فتكامل لنحصل على :

$$\int dv = 0$$

وحيث أن :

$$\therefore v + c = 0$$

$$y = xv$$

$$v = \frac{y}{x}$$

وبالتعويض ينتج :

$$\frac{y}{x} + c = 0$$

$$y + xc = 0$$

$$\therefore y = -xc \text{ أو}$$

(وهو الحل العام)

أما الحل الخاص فنحصل عليه بالتعويض عن قيم :

$$x = 1, y = 3 \text{ فينتج :}$$

$$3 = -(1)c$$

$$\therefore c = -3$$

وبالتعويض في الحل العام بقيمة $c = -3$ نحصل على :

$$y = -x(-3)$$

$$\therefore y = 3x$$

(وهو الحل الخاص)

مثال (2):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$$

الجواب:

نعوض بالقيم الآتية :

$$y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

ما دامت المعادلة متجانسة من الدرجة (2) ينتج عن ذلك :

$$(x^2 + v^2 x^2)dx - 2vx^2(vdx + xdv) = 0$$

$$x^2 dx + v^2 x^2 dx - 2vx^3 dv - 2v^2 x^2 dx = 0$$

$$x^2 dx - 2vx^3 dv - v^2 x^2 dx = 0$$

$$x^2(1 - v^2)dx - 2vx^3 dv = 0$$

الفصل

وبتغير إشارة الطرفين ينتج :

الثالث

$$2vx^3 dv + x^2(v^2 - 1)dx = 0$$

وبالقسمة على $x^3(v^2 - 1)$ ينتج :

$$\frac{2v}{v^2 - 1} dv + \frac{1}{x} dx = 0$$

والآن أصبحت المعادلة التفاضلية ذات متغيرين منفصلين فنكامل لنحصل على :

$$\frac{1}{2} \ln(v^2 - 1) + \ln x = c$$

$$\ln x(v^2 - 1)^{1/2} = c$$

$$x(v^2 - 1)^{1/2} = c$$

(راجع قواعد اللوغاريتمات الفقرة (3 - 5))

وبتربيع الطرفين ينتج :

$$x^2(v^2 - 1) = c$$

لاحظ أن ، يبقى ثابت عشوائي رغم التغيرات التي تطرأ عليه نتيجة التغيرات التي تطرأ على الطرف الأيمن من المعادلة .
وبالتعويض بقيمة :

$$v = \frac{y}{x}$$

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = c$$

$$y^2 - x^2 = c$$

$$y = (x^2 + c)^{\frac{1}{2}} \text{ أو}$$

(وهو الحل العام)

مثال (3) :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y^3 dx - x^3 dy = 0$$

الجواب :

$$y = vx$$

نعوض بـ

$$dy = v dx + x dv$$

في المعادلة التفاضلية ما دامت متجانسة من الدرجة (3) فينتج :

$$v^3 x^3 dx - x^3 (v dx + x dv) = 0$$

$$v^3 x^3 dx - x^3 v dx - x^4 dv = 0$$

$$x^3(v^3 - v)dx - x^4 dv = 0$$

$$x^4 dv + x^3(v - v^3)dx = 0$$

وبالقسمة على $x^4(v - v^3)$ نحصل على :

$$\frac{1}{v - v^3} dv + \frac{1}{x} dx = 0$$

والآن نكامل بعد أن أصبحت المعادلة بمتغيرين منفصلين :

$$\frac{1}{3} \ln(v - v^3) + \ln x = c$$

$$\ln[x(v - v^3)^{\frac{1}{3}}] = c$$

راجع قواعد اللوغاريتمات الفقرة (5-3) الفصل الثالث :

$$x(v - v^3)^{\frac{1}{3}}$$

الفصل

وبتكعيب الطرفين :

الثالث

$$x^3(1 - v^3) = c$$

وبالتعويض بقيمة $v = \frac{y}{x}$ ينتج :

$$x^3\left(\frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}\right) = c$$

$$x^2 y - y^3 = c$$

$$y = (x^2 - c)^{\frac{1}{3}} \quad \text{أو}$$

(وهو الحل العام)

مثال (4) :

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$$

الجواب:

نعيد صياغة المعادلة كالآتي :

$$(y+x)dy + (y-x)dx = 0$$

وبالتعويض بـ $y = vx$ نقيم

$$dy = vdx + xdv$$

بالمعادلة في المثال ينتج :

$$(vx+x)(vdx + xdv) + (vx-x)dx = 0$$

$$v^2 x dx + vx^2 dx + vx dx + x^2 dv + vx dx - x dx = 0$$

$$x(v^2 + 2v - 1)dx + x^2(1+v)dv = 0$$

وبالقسمة على $x^2(v^2 + 2v - 1)$ ينتج :

$$\frac{1}{x} dx + \frac{v+1}{v^2 + 2v - 1} dv = 0$$

والآن أصبحت المعادلة التفاضلية بمتغيرين منفصلين وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln(v^2 + 2v - 1) = c$$

$$\ln[x(v^2 + 2v - 1)^{\frac{1}{2}}] = c$$

$$x(v^2 + 2v - 1)^{\frac{1}{2}} = c$$

$$x^2(v^2 + 2v - 1) = c$$

ملاحظة :

إن ، يبقى ثابت عشوائي رغم التغيرات التي تطرأ عليه نتيجة التغيرات التي تطرأ على الطرف الأيمن من المعادلة .

وبالتعويض بـ $v = \frac{y}{x}$ ينتج :

$$x^2 \left(\frac{y^2}{x^2} - 2 \frac{y}{x} - 1 \right) = c$$

$$y^2 - 2xy - x^2 = c$$

$$y = (x^2 + 2xy + c)^{\frac{1}{2}} \quad \text{أو}$$

(وهو الحل العام)

مثال (5) :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

الفصل

$$x^3 - 2y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

الثالث

الجواب :

نعيد صياغة المعادلة كالآتي :

$$(x^3 - 2y^3)dx + 3xy^2 dy = 0$$

ما دامت الدالة متجانسة (من الدرجة 3) نعوض عن القيم التالية فيها:

$$y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

فيستج :

$$(x^3 - 2v^3 x^3)dx + 3v^2 x^3 (vdx + xdv) = 0$$

$$x^3 dx - 2v^3 x^3 dx + 3v^3 x^3 dx + 3v^2 x^4 dv = 0$$

$$(x^3 + v^3 x^3) dx + 3v^2 x^4 dv = 0$$

$$x^3(1+v^3) dx + 3x^4(v^2) dv = 0$$

وبالقسمة على $x^4(1+v^3)$ ينتج:

$$\frac{1}{x} dx + \frac{3v^2}{1+v^3} dv = 0$$

والآن بعد أن أصبحت المعادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين :

$$\ln x + \frac{1}{3} \ln(1+v^3) = c$$

$$\ln[x(1+v^3)^{1/3}] = c$$

$$x(1+v^3)^{1/3} = c$$

$$x^3(1+v^3) = c$$

$$x^3(1+\frac{y^3}{x^3}) = c$$

$$x^3 + y^3 = c$$

أو

$$y = \sqrt[3]{c - x^3}$$

$$= (c - x^3)^{1/3}$$

(وهو الحل العام)

مثال (6) :

جد الحل للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$$

الجواب :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^x}$$

ومن ثم: $e^x dy - e^x dx = 0$

وبلاحظ أن المعادلة ذات متغيرين منفصلين فنجري تكاملها:

$$e^y - e^x = c$$

(وهو الحل العام)

مثال (7):

جد حل المعادلة التفاضلية الآتية في ضوء الشروط المعطاة:

$$xdx - 4ydy = 0$$

يكون $y = 1$ عندما $x = 6$

الجواب :

الفصل يلاحظ أن المعادلة متجانسة وذات متغيرين منفصلين فنجري تكاملها مباشرة:

الثالث

$$\frac{1}{2}x^2 - 2y^2 = c$$

(وهو الحل العام)

والآن نبحث عن الحل الخاص:

بالتعويض بالقيم المعطاة من x, y نحصل على:

$$\frac{1}{2}(6)^2 - 2(1)^2 = c$$

$$18 - 2 = c$$

$$c = 16$$

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 - 2y^2 = 16$$

وبالضرب في (2) ينتج :

$$x^2 - 4y^2 = 32$$

(وهو الحل الخاص)

3-4-3 المعادلات التفاضلية التامة Exact Differential Equations

عندما بحثنا موضوع المشتقة الكلية لدالة $f(x, y)$ ودعنا نسميها $F(x, y)$ لاحظنا أن صيغة

الاشتقاق كانت كالآتي :

$$df(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

ولهذا فإن المعادلة التفاضلية هي :

$$(3-13) \quad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

ولهذه المعادلة حل عام $f(x, y) = C$ وتسمى مثل هذه المعادلات بالمعادلات التفاضلية التامة .

ويقال أن المعادلة التفاضلية ذات الصيغة العامة :

$$(3-14) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

هي معادلة تفاضلية تامة إذا كانت $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ هي المشتقة الكلية لبعض

من الدالة $F(x, y)$ بالنسبة إلى x, y على التوالي. وإذا كانت المشتقات الجزئية المختلطة من المرتبة

الثانية $F(x, y)$ موجودة ومستمرة.

$$(3-15) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

ولهذا فإن المعادلة التفاضلية بالصيغة :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ تكون تامة}$$

إذاً :

$$(3-16) \quad \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) dx = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y)$$

ويمكن بيان بأن هذا هو شرط كافي لإثبات أن المعادلة تامة فإن حلها يمكن استخراجها بإتباع

الخطوات الآتية :

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) \Leftrightarrow M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

وعندما نتأكد من أن المعادلة تامة فإن حلها العام يمكن استخراجها بإتباع الخطوات الآتية:

1- تكامل $M(x, y)$ بالنسبة إلى x ويكون الثابت الاعتيادي في عملية التكامل عادة $f(y)$

وبذلك نحصل على :

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx = G(x, y) + f(y)$$

2- نفاضل المعادلة المستخرجة من (1) أعلاه وهي :

الفصل $F(x, y) = G(x, y) + f(y)$ بالنسبة إلى y ونقارن ذلك مع $F(x, y)$ الموجودة أصلا في

الثالث

المعادلة التفاضلية المطلوب حلها كي نحصل على قيمة $\frac{\partial}{\partial y} f(y)$ أي:

$$\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} f(y) = \frac{\partial N}{\partial y}$$

$$(3-17) \quad \frac{\partial}{\partial y} f(y) = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial y}$$

3- تكامل $\frac{\partial}{\partial y} f(y)$ بالنسبة إلى y لنحصل على $f(y)$ أي :

$$\int \frac{\partial}{\partial y} f(y) dy = f(y)$$

ملاحظة:

ليس من الضرورة أن نضع الثابت هنا لأنه سيدخل في الخطوة الأخيرة من الحل كذلك يمكن إجراء التكاملات أولاً مع x بدلاً من y .

4- وبذلك نصل إلى الحل النهائي من الخطوات الثلاثة أعلاه فيكون:

$$f(x, y) = G(x, y) + f(y) + c \quad (3-18)$$

مثال (1):

حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$ydx + xdy = 0$$

الجواب:

نلاحظ أن المعادلة تفاضلية تامة:

نعيد كتابة المعادلة بالرموز كما في (3-14)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

ولكي تكون هذه المعادلة تامة يجب أن يتوفر فيها الشرط المبين في العلاقة

(3-16) وهو :

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y)$$

والآن نجد للاختبار :

$$M(x, y) = y$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$N(x, y) = x$$

$$\therefore \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

\therefore توفر الشرط التام.

إذن نستطيع أن نبدأ بحل المسألة حسب الخطوات الأربع أعلاه:

1- تكامل $M(x,y)$ بالنسبة إلى x ونضع الثابت مساوياً لـ $f(y)$ وكما يأتي:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{لدينا}$$

وبإجراء تكاملها ينتج: $f(x,y) = xy + f(y)$ ويظهر من النتيجة بأن:

$$G(x,y) = xy$$

المذكورة في الخطوة الأولى من طريقة الحل.

$$\therefore \frac{\partial G}{\partial y} = x$$

المذكورة في العلاقة (3-17) والتي نحتاجها في الحل.

2- الآن نفاضل المعادلة المستخرجة بالنسبة إلى y فينتج:

المعادلة هي:

الفصل $F(x,y) = xy + f(y)$

الثالث $\frac{\partial F}{\partial y} = x + \frac{\partial}{\partial y} f(y)$ و

ثم قارن مع $F(x,y)$ في أصل المعادلة التفاضلية والتي تساوي x كي نحصل على قيمة $\frac{\partial}{\partial y} f(y)$

وذلك:

$$(3-19) \quad \frac{\partial}{\partial y} f(y) = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = x \quad \text{كما لدينا} \quad \frac{\partial G}{\partial y} = x$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y} f(y) = x - x = 0$$

3- الآن نكامل $\frac{\partial}{\partial y} f(y)$ بالنسبة إلى y لنحصل على $f(y)$

$$\int \frac{\partial}{\partial y} f(y) = 0$$

$$\therefore f(y) = 0$$

وبذلك يكون الحل العام هو :

$$F(x, y) = G(x, y) + f(y) + c$$

$$= xy + (0) + c$$

$$\therefore xy = c$$

(وهو الحل العام)

مثال (2) :

جد الحل العام للدالة التفاضلية الآتية :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 24x}{x^2 + 16}$$

الجواب :

نعيد صياغة المعادلة

$$(2xy + 24x)dx + (x^2 + 16)dy = 0$$

والآن نختبر فيما إذا كانت المعادلة تفاضلية تامة أم لا :

نعيد كتابة المعادلة بالرموز كما في الصيغة (3-14) وكما يأتي :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

ولكي تكون هذه المعادلة تامة يجب أن يتوفر فيها الشرط الآتي المبين في العلاقة (3-16)

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y)$$

والآن دعنا نجرب :

$$M(x, y) = 2xy + 24x$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$N(x, y) = x^2 + 16$$

$$\therefore \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

إذن توفر الشرط التمام.

والآن نشرع بالحل :

1- تكامل $M(x, y)$ بالنسبة إلى x ونضع الثابت مساوياً لـ $f(y)$ وكما يأتي :

الفصل

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 24x \text{ وبعد إجراء تكاملها ينتج :}$$

الثالث

$$F(x, y) = x^2 y + 12x^2 + f(y)$$

ويظهر من النتيجة بأن $G(x, y) = x^2 y + 12x^2$ المذكورة في الخطوة الأولى والآن نجد

مشتقتها الجزئية بالنسبة إلى y فينتج:

$$\therefore \frac{\partial G}{\partial y} = x^2 \quad (3-20)$$

2- والآن نفاضل المعادلة المستخرجة بالنسبة إلى y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial}{\partial y} f(y)$$

ثم نقارن مع $N(x,y)$ في أصل المعادلة التفاضلية والتي تساوي $(x^2 + 16)$ كي نحصل على قيمة

$$\frac{\partial}{\partial y} f(y) \text{ وذلك :}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(y) = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial y}$$

لدينا:

$$\frac{\partial N}{\partial y} = x^2 + 16$$

كما لدينا

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} f(y) &= x^2 + 16 - x^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

3- نكامل $\frac{\partial}{\partial y} f(y)$ بالنسبة إلى (y) لنحصل على $f(y)$

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial y} f(y) &= 16 \\ \therefore f(y) &= 16y \end{aligned}$$

4- إذن الحل العام هو:

$$F(x, y) = G(x, y) + f(y) + c$$

$$x^2 y + 12x + 16y = c$$

ويمكن إيجاد الحل الخاص للمعادلة إذا كان $y=3$ عندما $x=5$ وذلك :

$$(5)^2 + 3 + 12(5) + 16(3) = c$$

$$75 + 300 + 48 = c$$

$$\therefore c = 423$$

ولهذا فإن الحل الخاص :

$$x^2 + 12x^2 + 16y - 423$$

مثال (3) :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$x(6xy + 5)dx + (2x^3 + 3y)dy = 0$$

الجواب

نعيد كتابة المعادلة :

$$(6x^2y + 5x)dx + (2x^3 + 3y)dy = 0$$

والآن نختبر تمامية المعادلة :

راجع المثال (1,2) للوقوف على تفاصيل الاختبار

الفصل

الثالث

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2$$

إذن المعادلة تفاضلية تامة ولهذا نشرع بالحل :

1- تكامل $M(x,y)$ بالنسبة إلى x ونضع الثابت مساوياً $f(y)$:

لدينا :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x^2y + 5x$$

$$\therefore F(x,y) = 2x^3y + \frac{5}{2}x^2 + f(y)$$

ويظهر من النتيجة أن :

$$G(x, y) = 2x^3y + \frac{5}{2}x^2$$

$$\therefore \frac{\partial G}{\partial y} = 2x^3$$

2- والآن نفاضل المعادلة المستخرجة بالنسبة إلى y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^3 + \frac{\partial}{\partial y} f(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(y) = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial y} \quad \text{وحيث أن}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 2x^3 \quad \text{و أن} \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 2x^3 + 3y$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial}{\partial y} f(y) &= 2x^3 + 3y - 2x^3 \\ &= 3y \end{aligned}$$

3- نكامل $\frac{\partial}{\partial y} f(y)$ بالنسبة إلى y لنحصل على $f(y)$:

$$\int 3y dy = \frac{3}{2} y^2$$

$$\therefore f(y) = \frac{3}{2} y^2$$

4- إذن الحل العام هو :

$$F(x, y) = G(x, y) + f(y) + c$$

$$= 2x^3y + \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + c$$

$$\therefore 2x^3y + \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 = c$$

$$4x^3y + 5x^2 + 3y^2 = c$$

(وهو الحل العام)

3-4-4 المعادلات التفاضلية الخطية Linear Differential Equations

عندما تكون لدينا معادلة تفاضلية ليست تامة فيمكن عند الحاجة تحويلها إلى معادلة تامة وذلك

عن طريق ضربها بعامل . أن مثل هذا العامل يسمى العامل التكاملي Integrating Factor لكونه يجعل المعادلة قابلة للتكامل.

أما عملية تحديد العامل التكاملي المناسب لمعادلة تفاضلية معينة فهي عملية ليست بالسهلة

ولكن يمكن إتباع الطريقة الآتية للحصول على العامل التكاملي المناسب لأي معادلة تكاملية خطية:

إن أية معادلة خطية في $y, \frac{dy}{dx}$ يمكن كتابتها بالصيغة الآتية :

$$\frac{dy}{dx} + yp(x) = Q(x) \quad (3-21) \quad \text{الفصل}$$

الثالث فإذا ضربت هذه المعادلة بعامل تكاملي هو $e^{\int p(x)dx}$ فالمعادلة المستخرجة تكون :

$$e^{\int p(x)dx} dy + yp(x)e^{\int p(x)dx} dx = Q(x)e^{\int p(x)dx} dx \quad (3-22)$$

والمعادلة أعلاه هي معادلة إذا جرى تكاملها ينتج :

$$ye^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} Q(x) dx + c \quad (33-23)$$

ولهذا فإن المعادلة: $\frac{dy}{dx} + yp(x) = Q(x)$

يكون حلها :

$$(8-24) \quad y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c \right]$$

وينفس الطريقة فإن المعادلة :

$$(8-25) \quad \frac{dx}{dy} + xp(y) = Q(y)$$

يكون $e^{\int p(y)dy}$ عاملها التكاملية تفاضلي ويكون حلها كما يأتي :

$$xe^{\int p(y)dy} = \int e^{\int p(y)dy} Q(y)dy + c$$

$$(3-26) \quad x = e^{-\int p(y)dy} \left[\int e^{\int p(y)dy} Q(y)dy + c \right] \text{ أو}$$

مثال (1) :

حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$2ydx = (y^4 + x)dy$$

الجواب :

نعيد صياغة المعادلة كي تأخذ الصيغة (3-25) أي الصيغة :

$$\frac{dx}{dy} = xp(y) = Q(y)$$

$$\therefore 2ydx = (y^4 + x)dy$$

$$2ydx = y^4 dy + xdy$$

$$2ydx - xdy = y^4 dy$$

وبالقسمة على $2y$ نحصل على :

$$dx - \frac{x}{2y} dy = \frac{y^3}{2} dy$$

وبالقسمة على dy ينتج:

$$(3-27) \quad \frac{dx}{dy} - \frac{x}{2y} = \frac{y^3}{2}$$

$$p(y) = -\frac{1}{2y}$$

لاحظ بأن

$$Q(y) = \frac{1}{2}y^3 \text{ و}$$

ولهذا فإن العامل التكامل المناسب هو :

$$e^{\int p(y)dy}$$

$$= e^{\int -\frac{1}{2y}dy}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\ln y}$$

الفصل

$$= y^{-\frac{1}{2}}$$

الثالث

وبذلك يكون لدينا :

$$xe^{\int p(y)dy} = \int e^{\int p(y)dy} Q(y)dy + c$$

وبالتعويض بقيمة $e^{\int p(y)dy}$ التي حصلنا عليها بالمعادلة أعلاه نحصل على:

$$xy^{-\frac{1}{2}} = \int y^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} y^3 \right) dy$$

$$xy^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int y^{\frac{5}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7} \right) y^{\frac{7}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{7} y^{\frac{7}{2}} + c$$

$$\therefore x = \frac{\frac{1}{7} y^{\frac{7}{2}} + c}{y^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(\frac{1}{7} y^{\frac{7}{2}} + c \right) y^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{7} y^4 + c y^{\frac{1}{2}}$$

وبالضرب في (7) ينتج :

$$7x = y^4 + c y^{\frac{1}{2}}$$

(وهو الحل العام)

مثال (2):

استخرج الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y dx + 2(x - 2y^2) dy = 0$$

ثم جد الحل الخاص إذا كانت $y = -1$, $x = 2$

الجواب :

نعيد صياغة المعادلة كي تأخذ شكل الصيغة (3-25) وكما يأتي:

$$y dx + 2x dy - 4y^2 dy = 0$$

بالقسمة على $y dy$ وإعادة الترتيب ينتج :

$$(3-28) \quad \frac{dx}{dy} + \frac{2x}{y} = 4y$$

$$p(y) = \frac{2}{y} \quad \text{ويلاحظ أن:}$$

$$Q(y) = 4y \quad \text{و}$$

وبذلك نصل إلى تحديد العامل التكاملي المناسب وهو:

$$\begin{aligned} e^{\int p(y) dy} &= e^{\int \frac{2}{y} dy} \\ &= e^{2 \ln y} \\ &= y^2 \end{aligned}$$

وبذلك يكون لدينا :

$$xe^{\int p(y) dy} = \int e^{\int p(y) dy} Q(y) dy + c$$

وبالتعويض ينتج :

$$\begin{aligned} xy^2 &= 4 \int y^2 (4y) dy \\ &= 4 \int y^3 dy \end{aligned}$$

الفصل

الثالث

$$xy^2 = y^4 + c$$

$$xy^2 - y^4 = c$$

$$y^2(x - y^2) = c$$

(وهو الحل العام)

أما الحل الخاص :

مادامت $y = -1$ عندما $x = 2$

$$(-1)^2 [2 - (-1)^2] = c \quad \text{فإن :}$$

$$c = 1$$

$$\text{إذن } y^2(x - y^2) = 1 \text{ (هو الحل الخاص)}$$

3-4-5 المعادلات التفاضلية الخطية في دالة y أو الخطية في دالة x

Differential Equation Linear In Function Of (Y) Or Function Of (X)

تكون الدالة التفاضلية خطية في المتغير (y) إذا كان بالإمكان كتابتها بالصيغة الآتية:

$$(3-28) \quad \frac{d}{dy} f(y) + f(y)p(x) = Q(y)$$

وهي معادلة من الدرجة الأولى في $\frac{d}{dy} f(y)$ و $f(y)$ وأن حلها يكون وفق ما يأتي :

$$(3-29) \quad f(y)e^{\int p(x)dx} = \left[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c \right]$$

وبالمثل فإن المعادلة التي يمكن كتابتها بالصيغة الآتية :

$$(3-30) \quad \frac{d}{dx} f(x) + f(x)p(y) = Q(y)$$

هي دالة خطية تفاضلية في المتغير $f(x)$ وأنها معادلة من الدرجة الأولى في $\frac{d}{dx} f(x)$ وأن

حلها يكون وفق ما يأتي :

$$(3-31) \quad f(x)e^{\int p(y)dy} = \left[\int e^{\int p(y)dy} Q(y)dy + c \right]$$

لنأخذ بعض الأمثلة :

مثال:

جد الحل العام للمعادلة الآتية :

$$x(1 - xy^4)dy + ydx = 0$$

الجواب:

نعيد صياغة المعادلة لا مكان مطابقتها مع الصيغة (3-28) أو (3-30) ودعنا نختار الصيغة الأخيرة :

بقسمة المعادلة على y وإعادة الترتيب ينتج :

$$dx + \frac{x}{y} dy = x^2 y^3 dy$$

وبذلك تظهر المعادلة بالصيغة (3-30) وإنها خطية في كل من $f(x)$ و $\frac{\partial}{\partial x} f(x)$.

والآن نضرب المعادلة بـ x^2 نحصل على :

$$x^{-2} dx + \frac{x^{-1}}{y} dy = y^3 dy$$

ثم نضرب في (2-) لينتج :

$$-2x^{-2} - \frac{2x^{-1}}{y} dy = -2y^3 dy$$

ومن ذلك نحصل على العامل التكاملية :

الفصل	$e^{\int \frac{2}{y} dy}$
الثالث	$= e^{2 \ln y}$
	$= y^{-2}$

وبلاحظ أن :

$$f(x) = x^{-1}, p(y) = -\frac{2}{y}, Q(y) = -2y^3 \text{ راجع (3-30)}$$

والآن نعوض في الصيغة (3-31) فينتج:

$$\therefore x^{-1} y^{-2} = \int y^{-2} (-2y^3) dy$$

$$x^{-1} y^{-2} = -2 \int y dy$$

$$x^{-1} y^{-2} + y^2 = c$$

$$\therefore y = \sqrt{c - x^{-1} y^{-2}}$$

أو نجري بعض التكيف فنحصل على :

$$y^2(x^{-1}y^{-4} + 1) = c$$

$$x^{-1}y^{-4} + 1 = \frac{c}{y^2}$$

بالضرب في xy^4 ينتج :

$$1 + xy^4 = xy^2c$$

(وهو الحل العام).

تمارين (3-1)

1- جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

$$y \frac{dy}{dx} 2x = 3y^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} - xy - \frac{x}{y} = 0 \quad \text{ب-}$$

$$\frac{dy}{dx} - x^2 + y = 0 \quad \text{ج-}$$

$$xydy = (x^2 - y^2)dx \quad \text{د-}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{y} - y\right)x \quad \text{هـ-}$$

$$(2y - xy - 3)dx + xdy = 0 \quad \text{و-}$$

$$\frac{dx}{dy} = x + e^y \quad \text{ز-}$$

2- جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية في ظل الشروط المبينة إزاء كل منها:

أ- $x(1-x^2)y^{\frac{1}{2}} = xy + x \frac{dy}{dx}$ ، عندما $x=0$ ، $y=2$

ب- $(x^2-1)^2 + 4y = 0 + x \frac{dy}{dx}$ ، عندما $x=0$ ، $y=-4$

ج- $2ydx = (x^2y^4 + x)dy$ ، عندما $x=1$ ، $y=3$

الفصل

الثالث

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية

وبعض التطبيقات الاقتصادية

المعادلات التفاضلية

وبعض التطبيقات الاقتصادية

مقدمة

1-4

ذكرنا بأن التفاضلية هي معادلة تحتوي على مشتقات أو تفاضلات وإن أكثر ما تستخدم فيه صيغ المعادلات التفاضلية هو النماذج الرياضية التي تعتبر ذات أهمية عالية في عرض العلاقات بين العناصر الرئيسية المكونة لها وأفضل النماذج هو الذي يحتوي على المؤشرات الأساسية للعلاقات القائمة وأضعفها الذي يحتوي على بعض من هذه المؤشرات. ومن تلك النماذج الرياضية النماذج الاقتصادية التي أصبحت ذات قيمة كبير في التحليلات الاقتصادية الكمية وحيث أن مثل هذه النماذج يقوم على المعادلات التفاضلية فإن الأمر يتطلب إيجاد الحل العام أو الحل الخاص لها لغرض الوصول إلى حل النموذج.

والنماذج الاقتصادية تقسم إلى قسمين: النماذج الساكنة (Static Models) والنماذج المتحركة

(Dynamic Models) وتعتني النماذج الساكنة بحالات التوازن أي الحالات التي نحافظ عليها عند بلوغها. **الفصل**

أما النماذج المتحركة فيدخل فيها عنصر الزمن سواء بشكل صريح أو ضمني. حيث يظهر بصيغة متغير في حالته الصريحة أو بصيغة متغيرات تباطؤية (Lagged Variables). **الرابع**

وتكثر تطبيقات المعادلات التفاضلية في بناء النماذج الاقتصادية المتحركة ولكننا في هذا الفصل

نستعرض المبسط منها لأن البعض منها يبلغ من التعقيد مما يتطلب المزيد من الدراية بالرياضيات المتقدمة.

وقبل تناول بعض النماذج المذكورة أعلاه نود الإشارة إلى نوعين من المتغيرات التي تدخل في هذه

النماذج هما:

المتغيرات الداخلية (Endogenous Variables) والمتغيرات الخارجية (Exogenous Variables)، إن المتغيرات الداخلية هي المتغيرات التي تتحدد قيمتها داخل النموذج بعد إجراء حله وبهذا فإن هذه القيم تخضع للتنبؤ أو تحتاج إلى معلومات لغرض إيضاحها. أما المتغيرات الخارجية فتعرف قيمتها مسبقاً ويمكن اعتبارها كثوابت في النموذج، أو بكلمة أخرى تعتبر المتغيرات الداخلية تنبؤية نحصل عليها من النموذج أما المتغيرات الخارجية فإنها تتحدد من خارج النموذج.

ويتكون النموذج عادة من معادلات عدة تكون البناء الأساسي للنموذج وتدعى بالمعادلات الهيكلية وفيها يتم إيضاح العلاقات التي تربط المتغيرات الداخلية بالمتغيرات الخارجية. وفيها يتم إيضاح العلاقات التي تربط المتغيرات الداخلية بالمتغيرات الخارجية.

أما حل المعادلات (النموذج) إذا كان لها حلاً فيتطلب إجراء عمليات صياغة وتكييف لمعادلات النموذج بحيث تصبح المتغيرات الداخلية في جهة والمتغيرات الخارجية من جهة أخرى أي تصبح المتغيرات الداخلية دوالاً للمتغيرات الخارجية ولبعض المعام (Parameters) وتدعى المعادلات حينذاك بالمعادلات ذات الصيغة المختصرة: (Reduced Form Equations) ويمكن أن نصل إلى حل النموذج حين نستطيع الحصول على معادلة مختصرة لكل متغير داخلي في النموذج.

وعندما لا يتحقق ذلك فإن النموذج يتعذر حله أو يحتاج إلى المعالجات الإضافية لتذليل عمليات حله. ودعنا نأخذ مثلاً عن كيفية اختصار النموذج.

فعندما تكون لدينا صيغة النموذج الآتي:

$$C = a_1 + a_2 y + a_3 M$$

$$I = b_1 + b_2 y$$

$$M = e_1 + e_2 E$$

$$y = d_1 + d_2 P$$

المعادلات التفاضلية وبعض التطبيقات الاقتصادية

والنموذج يحتوي على معادلات تشير متغيراتها إلى بعض من الحسابات الإجمالية للدخل الوطني حيث تشير C, Y, M, I, E, P إلى الاستهلاك والدخل والواردات والاستثمار والصادرات ومن ثم موارد استخراج النفط، أما a, b, c, d فهي ثوابت أو معالم. ولأجل حل النموذج ينبغي وضع معادلاته بالصيغة المختصرة فلو افترضنا بأن (C, I) هما المتغيران الداخليان وبقية المتغيرات خارجية فإن النموذج يمكن اختصاره بما يلي:

$$C = a_1 + a_2(d_1 + d_2 p) + a_3(e_1 + e_2 E)$$

$$I = b_1 + b_2(d_1 + d_2 p)$$

وبإعادة الصياغة ووضع معالم جديدة مساوية لحاصل ضرب المعالم الموجودة في المعادلتين أعلاه تصبح صيغة النموذج المختصرة الآتي:

$$C = a_1 + a_4 + a_5 P + a_6 + a_7 E$$

$$I = b_1 + b_3 + b_4 P$$

$$a_4 = a_2(d_1), a_5 = a_2(d_2)$$

على افتراض أن:

$$a_6 = a_3(e_1), a_7 = a_3(e_2)$$

و

$$C = a_8 + a_5 p + a_7 E$$

ومن ثم:

$$I = b_5 + b_4 P$$

$$a_8 = a_1 + a_4 + a_6$$

حيث أن:

$$b_5 = b_1 + b_3$$

الفصل

الرابع

وبذلك أظهرت الصيغة المختصرة للنموذج المتغيرات الداخلية دالة المتغيرات الخارجية أي أن:

$$C = f(P, E)$$

$$I = f(P)$$

ويمكن حل النموذج بمجرد وضع قيم لكل من (P,E) التي يفترض إنها معلومة باعتبارها متغيرات خارجية.

والآن بعد أن توضحنا الصيغة المبسطة للنموذج الاقتصادي سنحاول استعراض بعض التماذج الأكثر شيوعاً والتي تستند في بناءها على المعادلات التفاضلية:

2-4 نموذج النمو المبسط لدومار (*) Domar Growth Model

يقدم دومار نموذجاً في النمو الاقتصادي بصيغة المعادلات التفاضلية كالآتي:

$$(4-1) \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\alpha}{\beta} y = 0$$

حيث أن y يمثل الدخل و t الزمن أما α, β فهي معالم ثابتة.

ولحل النموذج نتبع الخطوات الآتية:

نجعل $\frac{\alpha}{\beta} = L$ للاختصار ونعيد صياغة النموذج في (4-1) ليصبح على غرار الصيغة (8-3) أي

صيغة المعادلة التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة أو:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

(*) إيفري ديفيد دومار (Evsey David Domar) أقتصادي ولد سنة 1914 وكانت تحيلاته لعمليات النمو الاقتصادي من الأعمال المبكرة لجعل التحليلات الكينزية ذات طابع متحرك وذلك بأخذ المتغيرات التي تقرأ على المتغيرات الاقتصادية الكلية عبر الزمن بنظر الاعتبار.

وذلك كالآتي:

$$\frac{dy}{dt} = Ly$$

$$(4-2) \quad \therefore \frac{dy}{y} Ldt$$

وعند مراجعة الفقرة (1/4-8) نستطيع أن نجد الحل العام للمعادلة (4-2) وذلك:
نكامل طرفي المعادلة فنحصل على:

$$\ln y = \frac{L^2}{2} + \ln C$$

$\ln C$: هو ثابت عشوائي واختير هنا بصيغة مناسبة حيث أن الأصل أن يكتب C

$$\ln \frac{y}{C} = \frac{L^2}{2}$$

$$\frac{y}{C} = e^{t^{\frac{L^2}{2}}}$$

الفصل

$$\therefore y = Ce^{t^{\frac{L^2}{2}}}$$

الرابع

$$(4-3) \quad y = Ce^{Lt}$$

أما الطريقة الثانية التي يمكن بموجبها حل النموذج فهي اختيار معامل تكاملي مناسب بعد وضع
المعادلة بالصيغة الآتية:

$$\frac{dy}{dt} - Ly = 0$$

وهنا تظهر $P(X)$ المبينة في العلاقة (8-19) تساوي (-1) وبذلك يمكن تحديد المعامل التكاملي
المناسب ألا وهو:

$$I_t = \alpha y_{t-1}$$

$$\therefore y e^{-\int \lambda dt} = \int e^{-\int \lambda dt} (0) + C$$

$$y e^{-\lambda t} = C$$

$$(4-4) \quad \therefore y = C e^{\lambda t}$$

وهو الحل العام للنموذج أيضاً.

نموذج دومار في الاقتصاد الكلي

3-4

Domar Macroeconomic Model

يتكون نموذج دومار في الاقتصاد الكلي من معادلات التي تحتوي على المتغيرات الكلية في الاقتصاد الوطني كالدخل والاستثمار والادخار أما صيغة النموذج فهي:

$$S(t) = \alpha y(t)$$

$$I(t) = \beta \frac{dy}{dt}$$

$$S(t) = I(t)$$

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

حيث أن (S) يمثل الادخار و (Y) الدخل و (I) الاستثمار وهي جميعا متغيرات داخلية ودوال للزمن (t) وتشير المعادلة الأولى إلى أن الادخار هو نسبة معينة من الدخل أما المعادلة الثانية فتتص على أن الاستثمار هو نسبة من معدل تغير الدخل عبر الزمن فيما تنص المعادلة الثالثة على تساوي كل من الادخار والاستثمار.

وتعكس المعادلات الثلاث العلاقات العامة بين المتغيرات فيها ويمكن استخراج معادلة جديدة منها تلخص التغيرات عبر الزمن في المتغيرات المذكورة وذلك كما يلي:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{I(t)}{\beta}$$

ولما كانت:

$$I(t) = S(t) = \alpha y(t)$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{\alpha}{\beta} y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{\alpha}{\beta} y(t) = 0$$

ويمكن إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية أعلاه بطريقة اختيار معامل تكاملي مناسب. وهنا

تظهر في المعادلة ($p(x)$) المبينة في العلاقة (8-19):

$$p(x) = -\frac{\alpha}{\beta}$$

الفصل

ومن ذلك يمكن تحديد المعامل التكاملي المناسب هو:

الرابع

$$e^{-\int (\alpha/\beta) dt}$$

أما الحل العام للنموذج فهو:

$$ye^{-\int (\alpha/\beta) dt} = \int e^{-\int (\alpha/\beta) dt} (0) + C$$

$$ye^{-(\alpha/\beta)t} = C$$

$$(45) \quad \therefore y = Ce^{(\alpha/\beta)t}$$

(وهو الحل العام)

وتظهر معادلة الحل بأن الدخل هو دالة للوقت مادامت α, β ثابت. أما قيم كل من S, I

فيمكن استخراجها بالطريقة التالية:

$$I = S = \alpha y = \alpha Ce^{(\alpha/\beta)t}$$

أما الحل الخاص للنموذج فهو:

إذا كانت $y = y_0$ وهو مستوى الدخل عند بداية الفترة عندما تكون $t = 0$ إذن:

$$y_0 = ce^{(\alpha/\beta)y_0} = C$$

وبذلك يكون الحل الخاص:

$$(4-6) \quad y = y_0 e^{(\alpha/\beta)y}$$

ومن الحل الخاص يمكن إيجاد قيم كل (S, I) حيث أن:

$$I = S = \alpha y = \alpha y_0 e^{(\alpha/\beta)y}$$

دعنا الآن نعطي لمعالم النموذج قيما افتراضية ونرى كيف يعمل النموذج:

$$S(t) = 0.18y(t)$$

$$I(t) = 0.9 \frac{dy}{dt}$$

$$S(t) = I(t)$$

وعندما تكون t في بداية الفترة فإن $y_0 = C$ ولنفترض أن الدخل في بداية الفترة يساوي (150)

فما هو مستوى الدخل بعد (4) سنوات. الآن نستخدم الحل الخاص من العلاقة (4-5) لنحصل على:

$$y = 150 e^{(0.18/0.9)(4)}$$

$$= 150 e^{0.8}$$

$$= 150(2.225)$$

$$\therefore y \approx 334$$

ويظهر من نتائج حل النموذج أن الدخل البالغ في بداية الفترة (150) قد أصبح (334) في نهاية الفترة التي افترض أنها (4) سنوات ويبدو أن الدخل نما بمعدل عالي هو 22% سنوياً تقريباً وهذا يعتمد على المعالم المقدرة للنموذج وهي (α, β) .

نموذج دومار في الدين الوطني

4-4

Domar National Debt Model

استخدم دومار مجموعة من المعادلات التفاضلية كتلك التي استخدمها في النموذج الكلي أعلاه حيث حاول في النموذج أدناه توضيح العلاقات بين الدخل الوطني والدين الوطني بصيغة النموذج الآتي:

$$\frac{dD}{dt} = \alpha y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta$$

$$y(0) = y_0$$

$$D(0) = D_0$$

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

الفصل

الرابع

حيث أن D تمثل الدين الوطني و y الدخل الوطني ويظهر في المعادلتين الأولى والثانية واضحاً أن كل من (D, y) هما متغيران داخليان وبتزايد في النموذج الدخل الوطني بمعدل ثابت هو β عبر الزمن t (وان معدل زيادة الدين الوطني هو نسبة ثابتة α من الدخل الوطني. أما المعادلتين الثالثة والرابعة فتعطي شروطاً ابتدائية للنموذج والتي تشير إلى أن الدخل الوطني في بداية الفترة يساوي مقدراً معيناً هو y_0 كما أن الدين الوطني في بداية الفترة يساوي أيضاً D_0 كما أن هناك شرطاً إضافياً ينص على أن كل من α, β ثوابت قيمتها أكبر من الصفر.

والآن إذا كاملنا المعادلة الثانية نحصل على:

$$y = \beta t + C$$

($C =$ أي ثابت عشوائي)

وحيث أن $y = y_0$ عندما $t = 0$ (إذن: $C = y_0$)

$$\therefore y = \beta t + y_0$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى من النموذج نحصل على:

$$\frac{dD}{dt} = \alpha \beta t + \alpha y_0$$

والآن نكامل:

$$D = \frac{1}{2} \alpha \beta t^2 + \alpha y_0 t + C$$

ومادام $D = D_0$ عندما $t = 0$ إذن نكون D_0 في المعادلة أعلاه $D_0 = C$

$$D = \frac{1}{2} \alpha \beta t^2 + \alpha y_0 t + D_0 \quad \text{وإن:}$$

وبذلك يكون حل النموذج كما يلي:

$$D(t) = \frac{1}{2} \alpha \beta t^2 + \alpha y_0 t + D_0 \quad \text{وإن:}$$

$$(4-7) \quad y(t) = \beta t + y_0 \quad \text{و}$$

وتعتبر نسبة الدين الوطني إلى الداخل الوطني ذات أهمية في نموذج دومار أعلاه وذلك حسبما

مبين أدناه:

$$\frac{D(t)}{y(t)} = \frac{\frac{1}{2} \alpha \beta t^2 + \alpha y_0 t + D_0}{\beta t + y_0}$$

أو بصيغة أخرى:

$$(4-8) \quad \frac{D(t)}{y(t)} = \frac{D_0}{\beta t + y_0} + \frac{\alpha y_0 t}{\beta t + y_0} + \frac{\frac{1}{2} \alpha \beta t^2}{\beta t + y_0}$$

$$\frac{D_0}{\beta t + y_0} \rightarrow 0$$

$$\frac{\alpha y_0 t}{\beta t + y_0} \rightarrow \frac{\alpha y_0}{\beta}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \alpha \beta t^2}{\beta t + y_0} \rightarrow \infty$$

$$\frac{D(t)}{y(t)} \rightarrow \infty \text{ :فان } t \rightarrow \infty$$

وفي هذا النموذج يلاحظ أن نسبة الدين الوطني إلى الدخل الوطني تتزايد بلا قيود عبر الزمن.

الفصل

الرابع

Price Adjustment Model نموذج السعر المعدل

5-4

يعتبر فالراس من الذين تناولوا توازن السوق مشيراً إلى التعديلات التي تجربها قوى السوق لإعادة التوازن في حالة اختلاله، كما تناول الموضوع مارشال وايفانز وغيرهم. وقد صيغت فرضيات السعر المعدل وفق نموذج يتحدث عن سوق للسلع يتمثل فيه العرض والطلب بمعادلتين خطيتين كما في النموذج الخطي البسيط ويمكن حلها للوصول إلى سعر التوازن بالطريقة الاعتيادية. ولكن بالإضافة إلى ذلك هناك معادلة تبين أن معدل تغير السعر عبر الزمن هو نسبة من الزيادة في الطلب أي زيادة الطلب على العرض (D-S) فإذا كانت الزيادة في الطلب موجبة أي (D-S > 0) فإن ذلك يؤدي إلى ارتفاع السعر في حين تؤدي الزيادة السالبة في الطلب إلى خفض السعر. أما صيغة النموذج فهي:

$$d(t) = \alpha_0 + \alpha_1 p(t)$$

$$s(t) = \beta_0 + \beta_1 p(t)$$

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(d - s)$$

$$\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \gamma > 0$$

حيث أن P تمثل السعر و S تمثل العرض و D تمثل الطلب و t الزمن أما α, β, γ فهي معالم

ثابتة. وهكذا يظهر واضحا من المعادلة الثالثة في النموذج أن الطلب لا يساوي العرض.

ولأجل حل النموذج تتبع الخطوات الآتية:

نعوض المعادلتين الأولى والثانية بالمعادلة الثالثة لينتج:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \gamma[(\alpha_0 + \alpha_1 p) - (\beta_0 + \beta_1 p)] \\ (4-9) \quad &= \gamma[\alpha_0 - \beta_0 + (\alpha_1 - \beta_1)p] \end{aligned}$$

وحيث أن سعر التوازن يتحقق عندما $D(t)=S(t)$ أي أن:

$$\alpha_0 + \alpha_1 p = \beta_0 + \beta_1 p$$

$$\alpha_1 - \beta_1 = p(\beta_1 - \alpha_1)$$

$$(4-10) \quad \therefore p_e = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1}$$

وهو سعر التوازن وقد رمزنا له بالرمز (p_e)

ومن المعادلة (4-10) نحصل على:

$$(\alpha_0 - \beta_0) = p_e(\beta_1 - \alpha_1)$$

أو

$$= -p_e(\alpha_1 - \beta_1)$$

وبالتعويض في المعادلة (4-9) ينتج:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \gamma[-p_e(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_1 - \beta_1)p] \\ &= \gamma(\alpha_1 - \beta_1)(p - p_e) \end{aligned}$$

واختصاراً بالرموز لتكن:

$$\lambda = \gamma(\alpha_1 - \beta_1)$$

فيكون لدينا:

$$\frac{dp}{dt} = \lambda(p - p_e)$$

$$\therefore \frac{1}{p - p_e} \cdot \frac{dp}{dt} = \lambda$$

الفصل

والآن نكامل على:

الرابع

$$\ln(p - p_e) = \lambda t + C$$

$$p - p_e = Ce^{\lambda t}$$

$$(4-11) \quad \therefore p = p_e + Ce^{\lambda t}$$

ولما كان السعر $p = p_0$ في بداية الفترة أي عندما $t = 0$ في بداية الفترة الزمنية وعندها تكون

$C = y_0 - y_e$ وبذلك تكون المعادلة (4-11) كما يأتي:

$$(4-12) \quad p = p_e + (p_0 - p_e)e^{\lambda t}$$

(وهو الحل العام للنموذج)

وحيث أن وكما ذكرنا أعلاه فإن:

$$p_e = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1}$$

كما أن:

$$\lambda = \gamma(\alpha_1 - \beta_1)$$

ومادام $\lambda < 0, p \rightarrow p_e$ عندما $t \rightarrow \infty$

مثال:

إذا كان الطلب والعرض (لكل وحدة من الزمن) على إنتاج معين حسب الدالتين الآتيتين على

التوالي:

$$d = ap + b \quad (1)$$

$$s = cp + m \quad (2)$$

حيث أن d, s هما الطلب والعرض على التوالي و P السعر و a, b, c, m معالم ثابتة. وإذا كان السعر

يتغير عبر الزمن بنسبة متناقصة مع الزيادة في الطلب على العرض. بين بأن:

$$\frac{dp}{dt} + \lambda(p - p_e) = 0 \quad (أ)$$

$$p = p_e + (p_0 - p_e)e^{-\lambda t} \quad (ب)$$

الجواب

(أ) نصيغ دالة السعر كمتغير عبر الزمن كنسبة من الزيادة في الطلب:

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma(d - s) \quad (3)$$

والآن نعوض المعادلة الأولى والثانية في المعادلة (3) فينتج:

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma[ap + b - cp - m]$$

$$= -\gamma[(b - m) + (a - c)p] \quad (4)$$

وحيث أن سعر التوازن يتحقق عندما $d = s$ أي أن:

$$ap + b = cp + m$$

$$b - m = p(c - a)$$

$$\therefore p_e = \frac{b - m}{c - a}$$

أو

$$b - m = p_e(c - a)$$

$$= -p_e(a - c)$$

وبتعويض ذلك في المعادلة (4) ينتج:

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma[-p_e(a - c) + (a - c)p]$$

وبإعادة الترتيب:

الفصل

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma[p - p_e(a - c)]$$

الرابع

والآن لتكن:

$$\lambda = \gamma(a - c)$$

$$\therefore \frac{dp}{dt} = -\lambda(p - p_e)$$

أو

$$\frac{dp}{dt} + \lambda(p - p_e) = 0 \quad (5)$$

(ب) نأخذ المعادلة (5) ونعيد صياغتها:

$$\frac{1}{p - p_e} \frac{dp}{dt} = -\lambda \quad (6)$$

ونكامل المعادلة (6) ينتج:

$$\ln(p - p_e) = -\lambda t + c \quad (7)$$

$$p = p_e + ce^{-\lambda t} \text{ أو } p - p_e = ce^{-\lambda t} \quad (8)$$

وحيث أن $p = p_0$ عندما $t \rightarrow 0$ في بداية الفترة فإن قيمة c في المعادلة

(8) تكون:

وبالتعويض في معادله (8) ينتج:

$$p_0 = p_e + ce^{-\lambda(0)}$$

$$= p_e + c$$

$$\therefore c = p_0 - p_e$$

$$p = p_e + (p_0 - p_e)e^{-\lambda t}$$

نموذج الدخل - الاستهلاك - الاستثمار

Income – Consumption – Investment Model

4-6

الجزء الثالث

يتكون هذا النموذج في بعض مكوناته من معادلة تفاضلية أما المعادلات الأخرى فيه فهي خطية

حيث يبين النموذج بأن الاستهلاك والاستثمار هما دالتان للدخل.

أما الدخل فيتغير بمعدل يمثل نسبة معينة من الزيادة في الطلب ويقصد بالطلب هنا الطلب على

الاستهلاك أو الاستثمار أما الزيادة في الطلب فهي الاستهلاك والاستثمار معاً مطروحاً منهما الدخل الذي

يمثل جانب العرض. وبذلك يظهر النموذج بالإطار الآتي:

$$C_m(t) = \alpha Y_m(t) \quad (1)$$

$$I_m(t) = \gamma Y_m(t) \quad (2)$$

$$\frac{dY_m}{dt} = \lambda(c_m + I_m - Y_m) \quad (3)$$

$$Y_m(0) = Y_0 - y_e \quad (4)$$

$$\alpha > 0, \gamma > 0, \lambda > 0$$

حيث أن C_m, I_m, Y_m هي انحرافات كل من الاستهلاك والاستثمار والدخل على التوالي عن قيمتها في مستوى التوازن أي عن: C_e, I_e, Y_e أما α, γ, λ فهي معالم ثابتة ولحل النموذج أعلاه نقوم بما يأتي:

نعوض المعادلتين الأولى والثانية بالمعادلة الثالثة لنتج:

$$\frac{dY_m}{dt} = \lambda(\alpha Y_m + \gamma Y_m - Y_m) \quad (5)$$

$$= \lambda(\alpha + \gamma - 1)Y_m$$

$$\frac{dY_m}{Y_m} = \lambda(\alpha + \gamma - 1)dt \quad (6)$$

الفصل

والآن نكامل المعادلة التفاضلية (6) ينتج:

الرابع

$$\ln Y_m = \lambda(\alpha + \gamma - 1)t + C \quad (7)$$

لاحظ بأن C تمثل هنا ثابت عشوائي وليس الاستهلاك.

$$Y_m = Ce^{\lambda(\alpha + \gamma - 1)t} \quad (8)$$

ومادام $Y_m = Y_0 - Y_e$ عندما $t = 0$ حيث أن Y_0 هو الدخل في بداية الفترة.

وعندما $t = 0$ تكون قيمة C في المعادلة (8) كما يأتي:

$$Y_m = Ce^0$$

$$Y_m = C$$

نذكر مره أخرى بأن C هنا هي ثابت عشوائي وليس الاستهلاك.

وحيث أن $Y_m(0) = Y_0 - Y_e$ من المعادلة (4) فإن:

$$\therefore C = Y_0 - Y_e \quad (9)$$

وبالتعويض عن قيمة C في المعادلة (9) بالمعادلة (8) ينتج:

$$Y_m = (Y_0 - Y_e)e^{\lambda(\alpha+\gamma-1)t} \quad (10)$$

ولما كان مقدار انحراف الدخل بشكل عام Y_m هو الدخل مطروحا منه الدخل عند مستوى

التوازن أي أن:

$$Y_m = Y - Y_e$$

$$\therefore Y = Y_e + Y_m \quad (11)$$

وبالتعويض عن قيمة Y_m الواردة في المعادلة (10) بالمعادلة (11) ينتج:

$$Y = Y_e + (Y_0 - Y_e)e^{\lambda(\alpha+\gamma-1)t}$$

وإذا ما $t \rightarrow \infty$ وكانت $\alpha + \lambda < 1$ فإن:

$$Y \rightarrow Y_e, \quad e^{\lambda(\alpha+\gamma-1)t} \rightarrow 0$$

تمارين (4-1)

1- تشير الدراسات في سوق معينة إلى أن دالتي الطلب والعرض على سلعة ما كانت على التوالي

كما يلي:

$$d = a + bp$$

$$s = m + c p$$

وكان السعر يتغير عبر الزمن بنسبة متزايدة عن مقدار الزيادة في الطلب أي أن:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(d - s)$$

والمطلوب إيجاد مستوى السعر (P) في هذه السوق عن طريق حل النموذج.

2- وجد أن نموذج الدين الوطني حسب الصيغة الآتية:

$$\frac{dD}{dt} = \alpha y(t) + \gamma$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta$$

$$Y(0) = Y_0$$

$$D(0) = D_0$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$$

حل النموذج لإيجاد نسبة الدين الوطني إلى الدخل الوطني.

3- خذ النموذج الآتي:

$$s(t) = \alpha y(t) + \gamma$$

$$l(t) = \beta \frac{dy}{dt}$$

$$s(t) = l(t)$$

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

الفصل

الرابع

جد الحل العام والحل الخاص للنموذج.

الفصل الخامس

معادلات الفروق

Difference Equations

معادلات الفروق

Difference Equations

مقدمة

1-5

ذكرنا في مقدمة الفصل الثامن بأن المعادلات التي تحتوي على متغيرات تتحرك بشكل منفصل (غير مستمر) تدعى بمعادلات الفروق. في حين تسعى المعادلات التي تعالج العلاقات بين المتغيرات التي تتبدل بشكل متصل (مستمر) بالمعادلات التفاضلية. وتكثر في الإحصاءات الاقتصادية طرق تسجيل البيانات وفق فترات زمنية متباينة فهناك الفترات السنوية كإحصاءات الدخل القومي والأنفاق الاستثمار وغيرها. وهناك الفترات الفصلية كالبيانات المالية وحسابات الشركات وموقفها المالي، وهناك الفترات الشهرية كالإحصاءات ميزانية الأسرة وأجور ورواتب الجهات الحكومية والأهلية وإحصاءات الإنتاج وغير ذلك، ومن الإحصاءات ما يسجل يوميا بالحسابات التي ترحل إلى سجلات الأستاذ واليومية في مختلف الشركات والأعمال. وهكذا يتبين لنا بأن الزمن أصبح عنصرا مهما في تسجيل المتغيرات الاقتصادية وأصبحت التبدلات التي تطرأ عليها دالة للزمن وخاصة عند إجراء التحليلات وحسابات التوقعات والتنبؤات وبناء النماذج الاقتصادية.

الفصل

الخامس

وعليه فقد اعتمد الزمن كمتغير مستقل تعتمد عليه المتغيرات الاقتصادية عند تبديلها من مستوى إلى مستوى آخر وصار يشار إلى التحليلات التي تعني بهذا الجانب بتحليلات الفترة الزمنية مادام التغير يتم عبر الزمن بصورة متقطعة بغض النظر عن كونه يوم أو فصل أو سنة أو غير ذلك.

كما تشير إلى أن إدخال الزمن كمتغير مستقل في المعادلات أو الدوال الاقتصادية ينقلها من الحالة الساكنة إلى الحالة الحركية فدالة الاستثمار بدلا أن تكتب بحالتها الساكنة: $I = ay$ أي أن مستوى الاستثمار (I) يساوي نسبة معينة من الدخل (y) تصبح في حالتها الحركية $I_t = ay_t$ بعد أن دخل عنصر الزمن (t) أو $I_t = ay_t$ ويكون الاستثمار هنا دالة للدخل في السنة السابقة أو ربما في السنة ما قبل السابقة وأية صيغة من صيغ الزمن تأخذها الدالة.

حيث أن استمرارية الزمن أو تقطعه هو الذي يحدد نوع المعادلة فيما إذا كانت تفاضلية أو فروق فإن الزمن (t) هو المتغير المستقل الذي يحدد لنا شكل التغيرات في المتغير المعتمد (y) ولكن لأغراض عمومية التحليل سنأخذ المتغير (x) بدلا من (t) كمتغير مستقل يؤثر على (y). وهنا نقول إذا كانت $y=f(x)$ بمفهوم معادلات الفروق فإن قيم y تتحدد بقيم صحيحة لـ (x) أي أن $x=0,1,2,3,\dots,n$ ويرمز لـ y عادة في معادلات الفروق بالرمز y_x وتعني التغير الذي يطرأ على نتيجة للتغير في x من (x) إلى ($x+1$) ويمكن كتابة هذه العلاقة كالآتي:

$$(5-1) \quad \Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

وتدعى Δ هنا بالعدد الذي يساعد على حساب التغيرات في y . أما المعادلة من النوع (10-1) فتسمى معادلة فروق من الدرجة الأولى لكونها تحسب لنا الفروق في المتغير y كمرحلة أولى عندما يتغير وعند ذاك نكون أمام معادلة فروق من المرتبة العليا وهكذا التدرج في المراتب كلما ارتقينا في عمليات حساب الفروق بين الفروق من مرتبة إلى الأكثر منها منزلة.

فالفرق الثاني لـ y_x يحسب كالآتي:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_x &= \Delta(\Delta y_x) \\ &= \Delta y_{x+1} - \Delta y_x \\ &= (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x) \\ (5-2) \quad &= y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x \end{aligned}$$

والفرق الثالث لـ y_x فيستخرج كما يأتي:

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_x &= \Delta(\Delta^2 y_x) \\ &= \Delta y_{x+2} - 2\Delta y_{x+1} + \Delta y_x \\ &= (y_{x+3} - y_{x+2}) - 2(y_{x+2} - y_{x+1}) + (y_{x+1} - y_x) \end{aligned}$$

معادلات الفروق

$$(10-3) \quad \Delta^2 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x$$

ويمثل هذا الأساس يمكن حساب الفرق من أية مرتبة بنفس الطريقة فحساب الفرق n لـ y_x يكون كما يلي:

$$(10-4) \quad \Delta^n y_x = \Delta(\Delta^{n-1} y_x) = \sum_{t=0}^n \frac{n!}{(n-t)!t!} (-1)^t y_{x+n-t}$$

يلاحظ أننا تعاملنا مع y كدالة لـ x بدلا من الزمن t وهو موضوع مناقشتنا لمعنى معادلات الفروق لأغراض التبسيط، وسنبقى على ذلك خلال الفقرات القادمة وسنعود لاستخدام الزمن t بدلا من x في الأقسام الأخيرة.

والصيغة رقم (10-4) تضع القاعدة العامة لحساب أي فرق مطلوب، ولأن لناخذ بعض الأمثلة لتوضيح ما سبق ذكره:

الفصل

مثال (1)

الخامس

$$y = x^2 + 5$$

إذا كانت

احسب الفرق الثاني لـ y_x

الجواب:

حسب العلاقة (10-2) فإن:

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$$

وعليه فإن

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_x &= [(x+2)^2 + 5] - 2[(x+1)^2 + 5] + [x^2 + 5] \\ &= (x^2 + 4x + 4 + 5) - 2(x^2 + 2x + 1 + 5) + (x^2 + 5) \\ &= (x^2 - 2x^2 + x^2) + (4x - 4x) + (9 - 12 + 5) \\ &= 2 \end{aligned}$$

مثال (2)

جد الفرق الأول للدالة الآتية:

$$y = 3x^2 + 1$$

الجواب:

من العلاقة (5-1) فإن الفرق الأول هو:

$$\begin{aligned}\Delta y_x &= y_{x+1} - y_x \\ &= [3(x+1)^2 + 1] - [3x^2 + 1] \\ &= 6x + 3 \\ &= 3(2x + 1)\end{aligned}$$

مثال (3)

جد الفرق الثالث للدالة الآتية:

$$y = 2x^3 - 1$$

الجواب:

باستخدام العلاقة (5-3) يمكن حل المسألة كما يلي:

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_x &= y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x \\ &= [2(x+3)^3 - 1] - 3[2(x+2)^3 - 1] + 3[2(x+1)^3 - 1] - [2x^3 - 1] \\ &= (2x^3 + 12x^2 + 18x - 1) - (6x^3 + 24x^2 + 2x - 1) + (6x^3 + 12x^2 + 6x - 1) - (2x^3 - 1) \\ &= (2x^3 - 6x^3 + 6x^3 - 2x^3) + (12x^2 - 24x^2 + 12x^2) + (17x - 23x + 5x) + (-1 + 1 - 1 + 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

10-3 معادلات الفروق الخطية Linear Difference Equations

تكون معادلة الفروق خطية إذا كان المتغير المعتمد من الدرجة الأولى أي غير مرفوع لقوة معينة صريحة أو ناجمة عن حاصل ضرب تبادلي، أما مرتبة المعادلة فكما ذكرنا فهي أعلى فرق موجود في المعادلة

فالمعادلة :

$$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 2y_x = 4x$$

هي معادلة فروق خطية أما مرتبتها فهي المرتبة الثانية وعادة ما تكتب معادلات الفروق بإحدى

الطريقتين :

أ- إما كدالة ضمنية للمتغير y عند n من القيم المختلفة للمتغير y أي بالصيغة الآتية :

$$(5-5) \dots f(y_{x+n}, y_{x+n-1}, y_x) = 0$$

ب- أو كدالة للمتغير y وفروقاته n أي بالصيغة الآتية :

$$(5-6) \dots F(\Delta^n y_x, \Delta^{n-1} y_x, \dots, \Delta y_x, y_x) = 0$$

وتعتبر الصيغة (5-5) أكثر استعمالاً وتداولاً ولتوضيح كيفية كتابة معادلات الفروق ومن الصيغة

المذكورة نأخذ الأمثلة الآتية .

مثال (1)

الفصل

خذ معادلة الفروق حسب (5-6)

الخامس

$$\Delta y_x = 3$$

يمكن أن تكتب حسب الصيغة (5-5)

$$y_{x+1} - y_x = 3$$

(وهي خطية من المرتبة الأولى)

مثال (2)

لدينا معادلة الفروق حسب الصيغة (5-6)

$$\Delta^2 y_x - 2\Delta y_x = x$$

نستطيع كتابتها حسب الصيغة كما يلي :

$$\Delta(y_{x+1} - y_x)(-2(y_{x+1} - y_x)) = x$$

$$(y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x) - 2(y_{x+1} - y_x) = x$$

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x - 2y_{x+1} + 2y_x = x$$

$$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 3y_x = x$$

وهي معادلة فروق ومن المرتبة الثانية .

5-4 حلول معادلات الفروق

5-4

يعرف حل معادلة الفروق بأنه العلاقة الدالية التي لا تحتوي على فروقات وتتحدد قيمتها بجمع القيم الصحيحة غير السالبة والتي تفي بمتطلبات معادلة الفروق نفسها .
وبمعنى آخر تعتبر $y=f(x)$ حلاً لمعادلة فروق إذا كانت أي قيمة لـ y تفي بمتطلبات معادلة الفروق لكل قيم المتغير المستقل x التي تؤخذ لهذا الغرض.

أما الحل العام لمعادلة الفروق فيعرف بكونه الحل الذي يحتوي على n من الثوابت العشوائية .
أما الحل الخاص لمعادلة الفروق فهو الحل الذي يمكن الحصول عليه من الحل العام عن طريق إعطاء قيم معينة للثوابت العشوائية الموجودة في الحل العام ، وهذه القيم تعطي ضمن الشروط الأولية (initial conditions) ويعتمد عدد الثوابت العشوائية في الحل العام على مرتبة معادلة الفروق فالمعادلة من المرتبة n تحتوي حلها العام n من الثوابت العشوائية ولهذا يحتاج إلى n من الشروط الأولية .
لنأخذ بعض الأمثلة الإيضاحية :

مثال (1)

بين بأن $y_x = x + c$ هو حل لمعادلة الفروق التالية :

$$y_{x+1} - y_x = 1$$

معادلات الفروق

ثم جد الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 1$ (ونعني بـ y_0 قيمة y في بداية الفترة أي عندما يكون الزمن $t=0$) ولكن لتذكر إننا نستخدم الآن x بدلا من t كما سلفنا ذكره .

الجواب

$$y_{x+1} - y_x = 1$$

$$(x+1+c) - (x+c) = 1$$

لذلك فإن

$$y_x = x + c$$

وهو الحل العام

ولدينا :

$$y_0 = 1$$

$$x + c = 1$$

لو كان $x=0$ في بداية الفترة فإن :

الفصل

$$1 = 0 + c$$

الخامس

$$c = 1$$

ولهذا فإن $y_x = x + 1$ وهو الحل الخاص عندما $y_0 = 1$

مثال (2):

بين أن

$$y_x = \frac{(x-1)}{3} + c$$

هو حل معادلة الفروق

$$y_{x+1} - y_x = \frac{2}{3}x$$

ثم جد الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 4$

الجواب:

لدينا:

$$y_{x+1} - y_x = \frac{2}{3}x$$

$$\therefore \left(\frac{(x+1-1)(x+1)}{3} + c - \left(\frac{(x-1)x}{3} + c \right) \right) = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{x(x+1)}{3} + c - \left(\frac{(x-1)x}{3} + c \right) = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{x(x+1-x-1)}{3} = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{2x}{3} = \frac{2}{3}x$$

لذلك فإن

$$y_x = \frac{(x-1)x}{3} + c$$

(وهو الحل العام لمعادلة الفروق)

أما الحل الخاص كالآتي :

لدينا :

$$y_0 = 4$$

$$\therefore x = 0$$

في بداية الفترة

وهكذا فإن

$$4 = \frac{(0-1)0}{3} + c$$

$$c = 4$$

وبذلك يكون الحل الخاص :

$$y_x = \frac{(x-1)x}{3} + 4$$

معادلة الفروق الخطية من المرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة Linear First - Order Difference Equations With Constant Coefficients

5-5

تكتب معادلة الفروق الخطية من المرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة كما في الصيغة الآتية :

$$a_0(x)y_{x+1} = a_1(x)y_x = g(x) \quad , \quad a_0(x) \neq 0 \quad , \quad a_1(x) \neq 0$$

$$(5-7) \quad \dots y_{x+1} = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_x + \frac{g(x)}{a_0(x)}$$

وإذا كانت :

$$a_0(x) \quad , \quad a_1(x) \quad , \quad g(x)$$

الفصل

ثوابت وليست دوال للمتغير x فإن :

الخامس

$$(5-8) \quad \dots y_{x+1} = Ay_x + B$$

حيث أن A, B ثوابت و $A \neq 0 \quad , \quad B \neq 0$ إذا وإذا فقط $g = 0$ في المعادلة الأصلية (5-7)

أما حل هذه المعادلة فيتم حسب الخطوات التالية :

$$Y_1 = AY_0 + B$$

$$Y_2 = A(AY_0 + B) + B$$

$$= A^2 Y_0 + AB + B$$

$$Y_3 = A^2 (AY_0 + B) + AB + B$$

$$= A^3 Y_0 + A^2 B + AB + B$$

$$Y_4 = A^3 (Ay_0 + B) + A^2 B + AB + B$$

$$= A^4 Y_0 + A^3 B + A^2 B + AB + B$$

$$Y_5 = A^4 (Ay_0 + B) + A^3 B + A^2 B + AB + B$$

$$= A^5 Y_0 + A^4 B + A^3 B + A^2 B + AB + B$$

$$= A^5 Y_0 + B(A^4 + A^3 + A^2 + A + 1)$$

وهكذا فإن :

$$Y_x = A^x Y_0 + B(1 + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{x-1})$$

$$Y_x = A^x Y_0 + B \sum_{s=0}^{x-1} A^s$$

ونلاحظ أن $\sum_{s=0}^{x-1} A^s$ ما هي إلا متوالية هندسية ذات مجموع يساوي $\frac{1-A^x}{1-A}$ في حالة $A \neq 1$

، ويساوي x في حالة $A = 1$.

وبهذا فإن حل معادلة الفروق $y_{x+1} = Ay_x + B$ يأخذ صيغتين هما :

$$(5-9) \dots y_x = A^x y_0 + B \left(\frac{1-A^x}{1-A} \right) \text{ FOR } (A \neq 1, X = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(5-10) \dots y_x = y_0 + B \text{ FOR } (A = 1, X = 0, 1, 2, \dots)$$

ونلاحظ أن الحل في (5-9) أو (5-10) يفي متطلبات المعادلة

(5-8) وهي :

$$y_{x+1} = Ay_x + B$$

وكما موضح أدناه :

إذا كان $A \neq 1$ فإن

معادلات الفروق

$$\begin{aligned}
 y_{x+1} &= Ay_x + B \\
 &= A(A^x Y_0 + B \frac{1-A^x}{1-A}) + B \\
 &= A^{x+1} Y_0 + B(\frac{A-A^{x+1}+1-A}{1-A}) \\
 &= A^{x+1} Y_0 + B(\frac{1-A^{x+1}}{1-A})
 \end{aligned}$$

أما إذا كان $A = 1$ فإن

$$\begin{aligned}
 y_{x+1} &= y_x + B \\
 &= (y_0 + BX) + B \\
 &= y_0 + B(X+1)
 \end{aligned}$$

الفصل

وهناك ثلاثة حالات خاصة لمعادلة الفروق :

الخامس

$y_{x+1} = Ay_x + B$ تظهر خلال التحليلات الاقتصادية إلا وهي :

1- معادلة فروق من المرتبة الأولى ذات ثابت :

$$(5-11) \dots y_{x+1} - y_x = B$$

ويكون حل هذه المعادلة :

$$y_x = y_0 + BX \quad (5-10)$$

2- معادلة فروق من المرتبة الأولى ذات تناسب مع المتغير وتنجم هذه الحالة عندما :

$$A = \frac{1}{1-\alpha}, \quad B = 0$$

وحيث تكون المعادلة :

$$Y_{x+1} - Y_x = \alpha Y_{x+1}$$

ويكون حل هذه المعادلة :

$$(5-12) \dots Y_x = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x Y_0$$

3- معادلة فروق من المرتبة الأولى وتشكل دالة خطية مع المتغير بالصيغة الآتية :

$$Y_{x+1} - Y_x = \alpha Y_{x+1} + B$$

وتتجم هذه الحالة عندما:

$$A = \frac{1}{1-\alpha}, \quad B = \frac{1}{1-\alpha}$$

ويكون حل هذه المعادلة :

$$(5-13) \dots Y_x = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x Y_0 + \frac{B}{\alpha} \left[\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x - 1 \right]$$

ملاحظة :

إذا كان $B = 0$ في معادلة الفروق $y_{x+1} = Ay_x + B$ فإنها تصبح كالآتي :

$$y_{x+1} = Ay_x \text{ ويكون حلها حسب الصيغة (5-9) :}$$

$y_x = A^x y_0$ وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المساعدة وسوف نحتاج لها عند مناقشة معادلة

الفروق من الدرجة الثانية :

ولتوضيح حل معادلة الفروق الخطية من المرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة نأخذ الأمثلة الآتية :

مثال (1) :

حل المعادلة :

$$y_{x+1} = 2y_x + 2$$

ثم نجد الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 2$

الجواب :

يلاحظ أن $A = 2$ أي أن $A \neq 1$

لذلك نؤخذ صيغة الحل المذكور في (5-9) وهو :

معادلات الفروق

$$y_1 = A^1 y_0 + B \left(\frac{1 - A^1}{1 - A} \right)$$

$$= 2^x y_0 + 2 \left(\frac{1 - 2^x}{-1} \right)$$

$$y_1 = 2^x y_0 + (1 - 2^x)$$

$$y_x = (y_0 + 2) 2^x - 2$$

وهو الحل العام

أما الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 2$ فإن :

$$y_x = (2 + 2) 2^x - 2$$

$$= (2)^2 (2^x - 2)$$

الفصل

$$= 2^{x+2} - 2$$

الخامس

مثال (2) :

حل المعادلة الآتية :

$$y_{x+1} + 3y_x = 0$$

وجد الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 4$

الجواب :

نعيد صياغة المعادلة :

$$y_{x+1} = -3y_x$$

وبلاحظ أن $A \neq 1$ وذلك نأخذ الصيغة (5-9) كقاعدة لحل المعادلة :

$$y_x = A^x y_0 + B \left(\frac{1 - A^x}{1 - A} \right)$$

$$\therefore y_x = (-3)^x y_0 + (0) \left(\frac{1+3^x}{1+3} \right)$$

$$= (-3)^x y_0$$

وهو الحل العام

والحل الخاص إذا كانت $y_0 = 4$ هو :

$$y_x = (-3)^x 4$$

$$= 4(-3)^x \quad \text{لـ}$$

مثال (3) :

حل المعادلة الآتية :

$$2y_{x+1} - 2y_x + 6 = 0$$

ثم جد الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 5$:

الجواب :

نعيد صياغة المعادلة بعد القسمة على (2) ينتج :

$$y_{x+1} = y_x - 3$$

وبلاحظ هنا أن $A = 1$ ولهذا نطبق صيغة الحل كما في (5-10) :

وهي أيضاً مثالاً للحالة الخاصة رقم (1) المذكورة في (5-11)

$$y_x = y_0 - B$$

$$= y_0 - 3X$$

وهو الحل العام

وبذلك يكون الحل الخاص في حالة كون $y_0 = 5$:

$$y_x = 5 - 3X$$

مثال (4):

جد حل المعادلة الآتية :

$$3y_{x+1} = 2y_x + 3$$

الجواب:

بعد إعادة الصياغة بالقسمة على (3) تكون المعادلة :

$$y_{x+1} = \frac{2}{3}y_x + 1$$

يلاحظ أن $A \neq 1$ ولهذا نطبق صيغة الحل في (5-9) :

$$y_x = A^x y_0 + B \left(\frac{1 - A^x}{1 - A} \right)$$

$$= \left(\frac{2}{3} \right)^x y_0 + 1 \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^x}{1 - \frac{2}{3}} \right]$$

الفصل

الخامس

$$= \left(\frac{2}{3} \right)^x y_0 + 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^x \right]$$

$$= (y_0 + 3) \left(\frac{2}{3} \right)^x + 3$$

وهو الحل العام

مثال (5):

حل معادلة الفروق الآتية ثم جد الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 2$:

$$y_{x+1} - y_x = \frac{1}{5}y_x + 1$$

الجواب:

تظهر المعادلة أعلاه كما في الحالة (2) الخاصة ويكون حلها حسب الصيغة (5-12)

$$Y_x = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x Y_0$$

$$Y_x = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right)^x Y_0$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^x Y_0$$

وهو الحل العام

أما الحل الخاص عندما $Y_0 = 2$ فهو:

$$Y_x = \left(\frac{5}{4}\right)^x 2$$

$$= 2\left(\frac{5}{4}\right)^x$$

وللتحقق من صحة الحل إذا استخدمنا طريقة أخرى للحل بعد إعادة صياغة المسألة ينتج:

$$Y_{x+1} - \frac{1}{5} Y_{x+1} = Y_x$$

$$\frac{4}{5} Y_{x+1} = Y_x$$

$$Y_{x+1} = \frac{4}{5} Y_x$$

ويبدو هنا أن $A = \frac{5}{4} \neq 1$ مع ملاحظة أن $B = 0$

ولهذا نأخذ بطريقة الحل المذكورة في (5-9) لنحصل على :

معادلات الفروق

$$Y_x = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x Y_0$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^x Y_0$$

وهو نفس الحل العام أعلاه

مثال (6) :

حل معادلة الفروق الآتية ثم استخرج الحل الخاص بافتراض أن :

$$Y_0 = 3$$

$$Y_{x+1} - Y_x = \frac{3}{4} Y_{x+1} + 1$$

الجواب :

المعادلة أعلاه من الصنف الذي تنطبق عليه الحالة الخاصة (3) وبذلك يكون الحل حسب

الفصل

العلاقة (5-13) وكما يأتي :

الخامس

$$Y_x = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x Y_0 + \frac{B}{\alpha} \left[\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x - 1 \right]$$

$$\therefore Y_x = (4)^x Y_0 + \frac{1}{\frac{3}{4}} \left[\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)^x - 1 \right]$$

$$= (4)^x Y_0 + \frac{3}{4} (4)^x - \frac{4}{3}$$

$$= (4)^x \left(Y_0 + \frac{4}{3} \right) - \frac{4}{3}$$

ويكون الحل الخاص عندما :

$$Y_x = (4)^x \left(3 + \frac{4}{3} \right) - \frac{4}{3}$$

$$= 3(4)^x$$

وللتحقق من صحة الحل باستخدام طريقة أخرى بعد إعادة صياغة المعادلة كالآتي:

$$y_{x+1} - \frac{3}{4}y_{x+1} = y_x + 1$$

$$y_{x+1} = 4y_x + 4$$

ويمكن تطبيق طريقة الحل المبينة في (5-9) لينتج:

$$y_x = A^x y_0 + B\left(\frac{1-A^x}{1-A}\right)$$

$$\therefore y_x = (4)^x y_0 + (4)\left(\frac{1+4^x}{1+4}\right)$$

$$= (4)^x y_0 - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}(4)^x$$

$$= (4)^x \left(y_0 + \frac{4}{3}\right) - \frac{4}{3}$$

وهو نفس الحل العام أعلاه

سلوك تتابعية حل معادلة الفروق (أو المسار الزمني لمعادلة الفروق) Behavior Of

The Solution Sequence

5-6

ويقصد بالتتابعية أو التواتر كما تسمى في بعض الأحيان بجملة الكميات المرتبة تبعاً لقانون خاص، فإذا علم قانون تكوين التتابعية أمكن معرفة أي واحد من هذه الكميات. والتتابعية هي دالة لقيم صحيحة موجبة تعطى للمتغير المستقبل، ومن هذا

معادلات الفروق

نستنتج بأن حل معادلة الفروق هو تابعي . وعندما يكون الزمن هو المتغير المستقل فإن التابعية تدعى أحيانا بالمسار الزمني للمتغير المعتمد .

وفي معادلة الفروق الخطية من المرتبة الأولى يوفر تحديد y_0 تابعية الحل الآتي :

$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ وكل حد من هذه الحدود يستخرج طبقاً لمعادلة الفروق:

$$y_{x+1} = Ay_x + B \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

أو وفقاً لحل المعادلة :

$$y_x = A^x y_0 + B \left(\frac{1 - A^x}{1 - A} \right)$$

إذا كانت

$$A \neq 1, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$y_x = Ay_0 + Bx$$

الفصل

إذا كانت

$$A = 1, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

الخامس

وحيث أن A, B معطاة لهذه فإن تعيين y_0 يحدد تابعية الحل للأعداد الحقيقية . أن المسار

الزمني لحل معادلة الفروق يحتل مساحة في الكثير من التطبيقات العملية وإن هذا السلوك يعتمد على

قيم كل من (y_0, A, B) كما يظهر في الجدول رقم (5-1) والشكل (5-1) أيضاً حيث تتوضح الرسوم

البيانية لكل حالة سلوكية في الجدول . ومن ملاحظة النتائج التي يحتويها الجدول (5-1) يمكن إيجازها

عن طريق المبرهنة الآتية

مبرهنة :

يكون لمعادلة الفروق من الدرجة الأولى الخطية الآتية :

$$y_{x+1} = Ay_x + B$$

حل هو :

$$(5-14) \dots y_x = A^x(y_0 - y^*) + y^*$$

إذا كانت

$$A \neq 1, \quad X = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$(5-15) \dots y_x = y_0 + BX$$

إذا كانت

$$A \neq 1, \quad X = 0, 1, 2, 3, \dots$$

حيث أن:

$$Y^* = \frac{B}{1 - A}$$

وإذا كان $(-1 < A < 1)$

فإن المسار الزمني للحل يقترب من y^* وعدا ذلك فإنه يفترق منه باستثناء $y_x = y_0$

جدول رقم (5-1)

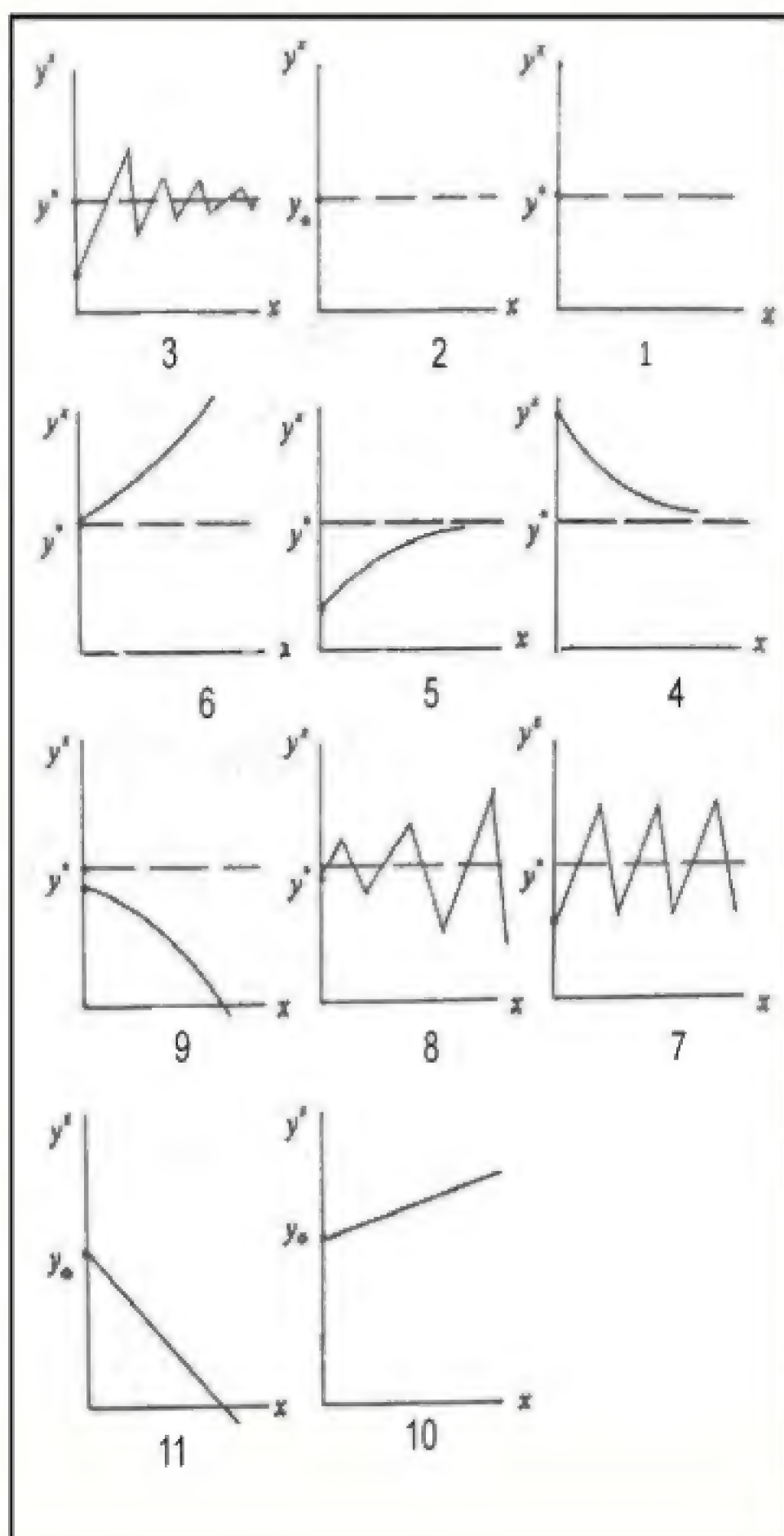
المسار الزمني لحل معادلة الفروق $y_{x+1} = Ay_x + B$

الحالة	Y_0	A	B	Y_x Y_x $X = 1, 2, 3, \dots$	سلوك متابعية الحل
1	$Y_0 = Y^*$	$A \neq 1$	—	$Y_x = Y^*$	$Y_x = Y^*$ ثابت
2		$A = 1$	$B = 0$	—	$Y_x = Y_0$ ثابت
3	$Y_0 \neq Y^*$	$-1 < A < 0$	—	—	تقارب نحو Y^* (تذبذب متناقص)

الفصل
الخامس

الحالة	Y_0	A	B	Y_x Y_x $X = 1,2,3,\dots$	سلوك متابعية الحل
4	$Y_0 > Y^*$	$0 < A < 1$	—	$Y_x > Y^*$	تقارب نحو Y^* (تناقص مضطرب)
5	$Y_0 < Y^*$	$0 < A < 1$	—	$Y_x < Y^*$	تقارب نحو Y^* (تزايد مضطرب)
6	$Y_0 > Y^*$	$A > 1$	—	$Y_x > Y^*$	افتراق نحو $+\infty$ (تزايد مضطرب)
7	$Y_x \neq Y^*$	$A = -1$	—	—	افتراق (تذبذب محدود)
8	$Y_0 \neq Y^*$	$A < -1$	—	—	افتراق (تذبذب بلا حدود)
9	$Y_0 < Y^*$	$A > 1$	—	$Y_x < Y^*$	افتراق نحو $-\infty$ (تناقص مضطرب)
10	—	$A = 1$	$B > 0$	$Y_x > Y_0$	افتراق نحو $+\infty$ (تزايد مضطرب)
11	—	$A = 1$	$B < 0$	$Y_x < Y_0$	افتراق نحو $-\infty$ (تناقص مضطرب)

أما الرسوم البيانية لمكونات الجدول (5-1) فتظهر كما يأتي :



شكل رقم (10-1)

ولتوضيح ذلك نأخذ بعض الأمثلة :

معادلات الفروق

مثال (1) :

حل معادلة الفروق الآتية وحدد المسار الزمني للحل واحسب بعض من القيم الأولى من المتابعة

$$8y_{x+1} + 2y_x - 4 = 0$$

$$y_x = 0$$

و

الجواب:

بالقسمة على (8) وإعادة الصياغة ينتج:

$$8y_{x+1} = -\frac{1}{4}y_x + \frac{1}{2}$$

وبلاحظ أن :

$$B = \frac{1}{2} \quad , \quad A = -\frac{1}{4}$$

الفصل

الخامس

$$\therefore y_x = A^x y_0 + B \left(\frac{1 - A^x}{1 - A} \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^x y_0 + \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^x}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} \right]$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^x y_0 + \frac{2}{5} \left[1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^x \right]$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^x \left(y_0 - \frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5}$$

وعندما $y_x = 2$ فإن :

$$y_x = \frac{8}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^x + \frac{2}{5}$$

وهو الحل الخاص

وحيث أن :

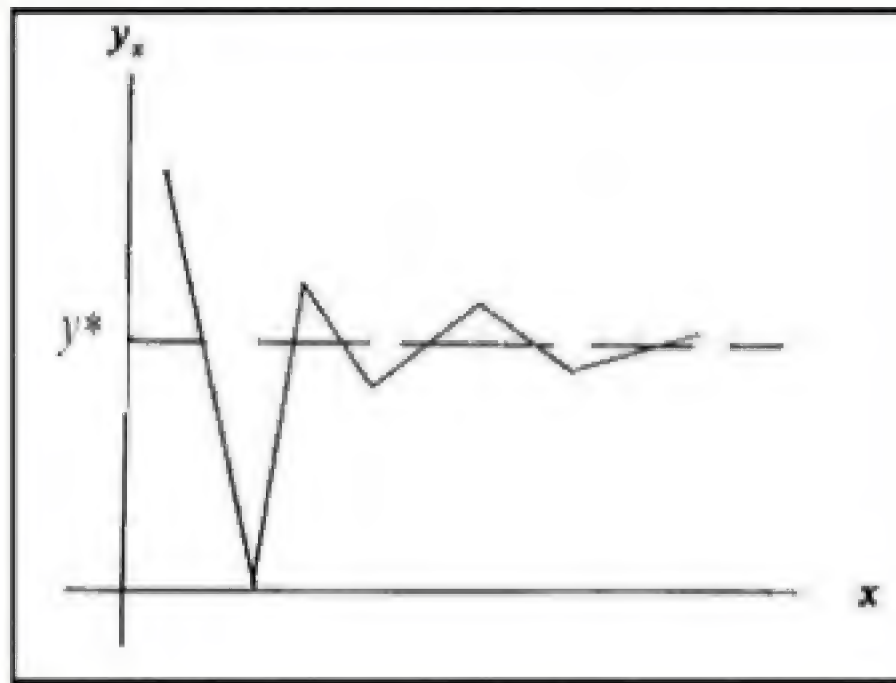
$$B = \frac{1}{2}, \quad A = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore y^* = \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{1}{2}}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{2}{5}$$

إذن الحالة التي تسلكها متابعية الحل هي الحالة (3) لأن $A > 1$ و تشير الحالة (3) إلى تقارب

نح y^* بتذبذب متضائل . كما يظهر في الشكل رقم (5-2) الآتي وكما تشير القيم الأولى من الحل وهي :

$$y_0 = 2, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{2}, \quad y_3 = \frac{3}{8}, \quad y_4 = \frac{51}{128}$$



شكل رقم (5-2)

مثال (2) :

حل معادلة الفروق الآتية وحدد المسار الزمني للحل واحسب القيم الأولى من الحل :

$$2y_{x+1} - y_x = 2$$

$$y_0 = 4$$

9

الجواب :

بالقسمة على (2) وإعادة الترتيب ينتج :

$$y_{x+1} = \frac{1}{2} y_x + 1$$

ويظهر من ذلك أن :

$$B = 1 \quad A = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y_x = \left(\frac{1}{2}\right)^x y_0 + 1 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^x y_0 + 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \right]$$

$$\text{الفصل} \quad = \left(\frac{1}{2}\right)^x (y_0 - 2) + 2$$

الخامس

وهو الحل العام

وعندما $y_0 = 4$ فإن :

$$y_x = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$$

وهو الحل الخاص

وحيث أن :

$$y^* = \frac{B}{1-A} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

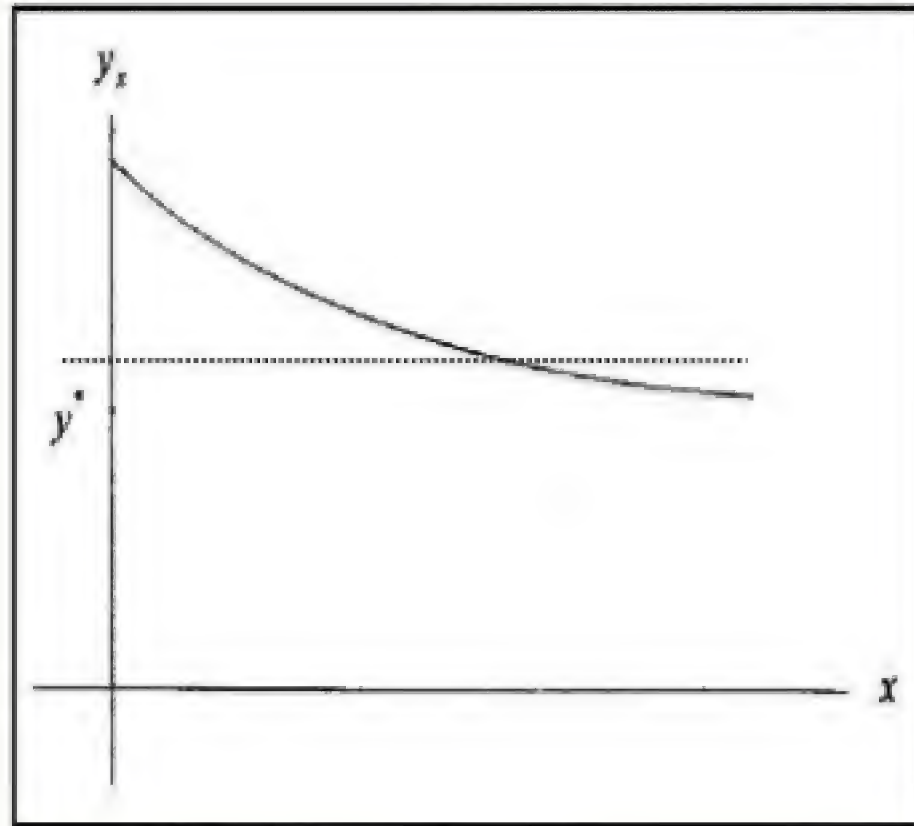
$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 1, \quad \text{و}$$

أي أن $A > 1$ وأن $y_0 > y^*$ و $y_x > y^*$

إذا الحالة السلوكية هي الحالة (4) التي تشير إلى تقارب نحو y^* وبتناقص مضطرد وبتبين هذا عند حساب بعض من القيم الأولى لـ y_t فنحصل على:

$$Y_1 = 3, Y_2 = \frac{5}{2}, Y_3 = \frac{9}{4}, Y_4 = \frac{17}{18}, \dots$$

كما يظهر في الشكل رقم (3-5) :



شكل رقم (3-5)

5-7 التوازن والاستقرار Equilibrium And Stability

إذا كان لمعادلة الفروق حل يأخذ شكل دالة ثابتة مثل $y_t = y^*$ فإن قيمة y^* بالنسبة لهذه الدالة تدعى بقيمة التوازن أو الاستقرار للمتغير y_t .

وتكون قيمة التوازن y^* مستقر إذا كان أي حل لمعادلة الفروق يقترب من y^* وبصورة مستقلة عن الشروط الأولية.

إن هذا النوع من الاستقرار يشار إليه في الأدب الاقتصادي بالاستقرار التام من النوع الأول (Perfect Stability Of The First Kind) أن الابتعاد عن قيمة التوازن يعني حالا جديدا بشروط أولية مختلفة ولهذا فالتوازن المستقر يمكن أن يعرف بأنه الحالة

معادلات الفروق

التي إذا انحرفت عن التوازن ستعقبها سلسلة من القيم للمتغير (y) التي تعود بها مرة ثانية للاقترب من التوازن .

مبرهنة:

يكون لمعادلة الفروق التالية:

$$y_{t+1} = Ay_t + B$$

قيمة التوازن لـ y تصاغ كالآتي :

$$y^* = \frac{B}{1-A} \text{ إذا كانت } A \neq 1 \dots (5-16)$$

وتكون y^* مستقرة إذا وإذا فقط ($-1 < A < 1$) باستثناء إذا كانت y_t ثابت . ويلاحظ أن

هذه المبرهنة تستند على المبرهنة السابقة ولهذا فإن التوازن يظهر فقط في الحالات (1 , 2 , 3 , 4 , 5) من الجدول رقم (5-1) .

ولتوضيح ذلك : نقول إن أي مقدار ثابت مثل قيمة ($0 < C < 1$) ومرفوعة إلى قوة (T)

يصغر هذا المقدار كلما ازدادت قيمة (T) ويقترب من الصفر إذا الفصل

($T \rightarrow \infty$) كذلك فإن أي مقدار ثابت قيمته ($-1 < C < 0$) ومرفوعة لقوة (T) فإن قيمته الخامس

تصغر بتذبذب كلما ازدادت قيمة (T) ويقترب من الصفر إذا ($T \rightarrow \infty$) ومن ملاحظة الصيغة (5-14

(وهي ($y_t = A^t(y_0 - y^*) + y^*$) وعندما ينظر إلى المسألة على كون $X = T$, $A = C$)

يتبين أن المقدار الثابت C المذكور أعلاه هو A في الصيغة أعلاه ولهذا عندما يكون :

($-1 < A < 1$, $X \rightarrow \infty$, $A^t \rightarrow 0$) وتبعاً لذلك فإن قيمة $A^t(Y_0 - Y^*) \rightarrow 0$ وبذلك

فإن $Y_t \rightarrow Y^*$ لتبلغ حالة الاستقرار . وكلما كانت قيمة A صغيرة كلما كان بلوغ حالة الاستقرار أسرع .

إن مراجعة الجدول رقم (5-1) تعطينا فكرة عن الحالات الأخرى لعلاقة y_t بحالة التوازن y^* :

فالحالة الانفجارية تحدث عندما $A > 1$ وهي الحالة رقم (6) أو التي يكون فيها مأل y_x الافتراق عن حالة التوازن y^* وبتزايد مضطرد باتجاه $+\infty$ وكلما ازدادت قيمة A كان الانفجار أسرع . كما يحدث الانفجار عندما $A > 1$ ولكن الافتراق عن حالة التوازن y^* يتجه نحو $-\infty$ وهي الحالة رقم (9) في الجدول .

أما حالة الانفجار المتذبذب فيحدث عندما $A < -1$ حيث يفرق y_x من y^* بتذبذب متزايد كما في الحالة رقم (8) من الجدول .

ولدينا أيضا حالة الافتراق المضطرد عندما $A = 1$ حيث لا يمكن في هذه الحالة استخراج قيمة

$$y^* \text{ والتي تساوي } \frac{B}{1-A} .$$

وعندها ننقل إلى الصيغة الثانية من الحل وهي (5-15) في حساب $y_x = y_0 + BX$ ، وهنا

تحدد قيمة y_x بالمقارنة مع y_0 بقيمة B فإذا كانت $B > 0$ تكون $y_x > y_0$ وهذا يؤدي إلى افتراق

نحو $+\infty$ وبتزايد مضطرد كما في الحالة (10) من الجدول . أما إذا كانت $B < 0$ فتكون $y_x < y_0$

وهذا يؤدي إلى افتراق نحو $-\infty$ ويتناقص مضطرد كما مبين في الحالة رقم (11) من الجدول . وعندما B

$= 0$ فإن $y_x = y_0$ وهي حالة الاستقرار الثابت والتي تحمل رقم (2) في الجدول .

وأخيرا لدينا الحالة رقم (7) من الجدول وهي الحالة التي يكون فيها $A = -1$ وعندها يكون

y_x مفترقا ولكن بتذبذب محدد .

Linear معادلات الفروق الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

8-5 Second-Order Difference Equations With Constant Coefficients

تكتب معادلة الفروق الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة بالصيغة الآتية:

$$(5-17) \dots y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = g(x)$$

ولنأخذ الحالة الخاصة التي هي :

$$g(x) = 0$$

$$(5-18) \dots y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

ومعادلة الفروق التي قيمة معاملها الثابت $g(x)$ يساوي صفراً تدعى أحياناً بالمعادلة المتجانسة

ولهذا فإن :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

هي معادلة فروق خطية متجانسة من المرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة مع ملاحظة بأنه ينبغي

التمييز بين تعريف المعادلة المتجانسة وتعريف الدالة المتجانسة . فمن أجل استخراج حل المعادلة :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

نحتاج لتكوين المعادلة المساعدة والتي تشتق حسب الخطوات الآتية :

الفصل

ذكرنا في الفقرة (5-5) أن حل معادلة الفروق من الشكل :

الخامس

$$y_x = A^x y_0 \text{ هو } y_{x+2} = A y_x$$

وإذا عوضنا هذا الحل في المعادلة (5-18) مع الأخذ بعين الاعتبار الفترات التباطؤية نحصل على

تسهيل عمليات الحل دعنا نعيد كتابة معادلة الحل بالصيغة الآتية :

$$y_x = M^x y_0$$

فنحصل على :

$$M^{x+2} y_0 + A_1 (M^{x+1} y_0) + A_2 (M^x y_0) = 0$$

وبالقسمة على $M^x y_0$ ينتج:

$$M^x + A_1 M + A_2 = 0$$

إن هذه المعادلة المساعدة هي معادلة من الدرجة الثانية ويمكن إيجاد حلها عن طريق التحليل إلى العوامل إذا كانت قابلة للتحليل أو عن طريق ما يسمى بالدستور أو القانون الخاص بحل المعادلات من هذا النوع وذلك لغرض استخراج قيمة جذري المعادلة أي القيمتين اللتين تظهران نتيجة لحل المعادلة المساعدة بطريقة الدستور للمتغير M وقد سميت هاتين القيمتين بـ (M_1, M_2) وكما موضح في أدناه :

المعادلة المساعدة كما في الصيغة أعلاه هي :

$$M^2 + A_1M + A_2 = 0$$

وعند حل هذه المعادلة بطريقة الدستور نحصل على :

$$M_1 = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}, \quad M_2 = \frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}$$

ويمكن أن تكون قيمة هذين الجذرين (M_1, M_2) : حقيقية وغير متساوية أو حقيقية متساوية أو مركبة أي إنها تحتوي على جذر تربيعي لعدد سالب. ويعتمد حل المعادلة :

$y_{x+2} + A_1y_{x+1} + A_2y_x = 0$ على طبيعة الجذرين (M_1, M_2) كما مبين أدناه ، مع الإشارة إلى أن الحل العام للمعادلة يتضمن ثابتين عشوائيين هما (C_1, C_2) ولهذا فإن الحل الخاص يوصف بشرطين أوليين أي بقيمتين لـ (Y) :

الحالة الأولى :

إذا كانت قيمة (M_1, M_2) حقيقية وغير متساوية $M_1 \neq M_2$ ويكون الحل :

$$(5-19) \quad \dots y_x = C_1M_1^x + C_2M_2^x$$

الحالة الثانية :

إذا كانت قيمة (M_1, M_2) حقيقية ومتساوية $M_1 = M_2 = M$ ويكون الحل :

$$(5-20) \quad \dots y_x = C_1M^x + C_2XM^x$$

الحالة الثالثة :

إذا كانت قيمة (M_1, M_2) أي أن :

$$M_1 = A + Bi, \quad M_2 = A - Bi \quad \text{Wher} \quad i = \sqrt{-1}$$

ويكون الحل :

$$(521) \quad \dots Y_x = r^x (C_1 \cos AX + C_2 \sin AX)$$

حيث أن

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}$$

أما θ فهي زاوية فيها :

$$\tan \theta = \frac{A}{B}$$

وكبديل لذلك فإن :

$$\sin \theta = \frac{A}{R}$$

الفصل

$$\cos \theta = \frac{B}{R}$$

الخامس

ملاحظة :

راجع ملحق هذا الفصل عن كيفية تمثيل الأعداد المركبة.

ويمكن استبدال كل من A, B أحدهما محل الآخر في التعاريف أعلاه مادامت الدالة المثلثية

دورية. ويكون من المناسب أن يكتب الحل عادة بالنسبة لـ θ في الربع الأول.

ولتوضيح إجراءات الحل أعلاه نأخذ الأمثلة الآتية :

مثال (1) :

جد الحل العام لمعادلة الفروق الآتية :

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 4y_x = 0$$

ثم جد الحل الخاص إذا كانت

$$y_1 = 0, y_0 = 3$$

الجواب:

نشكل المعادلة المساعدة

$$m^2 - 5m + 4 = 0$$

ومنها نستخرج قيمة كل من m_1, m_2 كما يأتي :

$$m_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

$$m_2 = \frac{5 - \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

وبذلك يكون الحل العام كما في الحالة الأولى لأن $m_1 \neq m_2$ وقيمة كل منها حقيقية:

$$y_x = c_1(4)^x + c_2(1)^x$$

$$= c_1(4)^x + c_2$$

وإذا كان $y_0 = 3$, $y_1 = 7$ فإن الحل الخاص يكون :

$$3 = c_1 + c_2$$

هنا $x = 0$

$$7 = c_1 4^1 + c_2$$

$$= 4c_1 + c_2$$

هنا $x = 1$

وبحل المعادلتين آنياً :

$$3 = c_1 + c_2$$

معادلات الفروق

$$7 = 4c_1 + c_2$$

$$\therefore c_1 = 3 - c_2$$

وبالتعويض بالمعادلة الثانية ينتج :

$$7 = 4(3 - c_2) + c_2$$

$$7 = 12 - 3c_2$$

$$\therefore c_2 = \frac{5}{3}, c_1 = \frac{4}{3}$$

إذن الحل الخاص يكون :

$$y_x = \frac{4}{3}(4)^x + \frac{5}{3}$$

مثال (2) :

جد الحل العام لمعادلة الفروق الآتية :

$$y_{x+1} + 2y_{x+1} + y_x = 0$$

الفصل

الجواب :

الخامس

نشكل المعادلة المساعدة وهي

$$m^2 + A_1 + A_2 = 0$$

نحصل على :

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$\therefore m_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4(1)}}{2} = -1$$

$$m_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4(1)}}{2} = -1$$

وبهذا يتضح بأن :

$$m_1 = m_2 = m$$

إذن الحل العام يكون كما مبين في الحالة الثانية :

$$\begin{aligned} y_x &= c_1 m^x + c_2 x m^x \\ &= c_1 (-1)^x + c_2 x (-1)^x \\ \therefore y_x &= (c_1 + c_2 x) (-1)^x \end{aligned}$$

مثال (3) :

جد الحل العام لمعادلة الفروق الآتية :

$$y_{x+2} + 2y_x = 0$$

الجواب :

نشكل المعادلة المساعدة :

$$m^2 + A_1 m + A_2$$

فنحصل على :

$$m^2 - (0)m + 2 = 0$$

$$\therefore m^2 + 2 = 0$$

حيث أن $A_1 = 0, A_2 = 2$

$$\therefore m_1 = \frac{-(0) + \sqrt{(0)^2 - 4(2)}}{2} = \frac{\sqrt{-8}}{2}$$

$$m_2 = \frac{-(0) - \sqrt{(0)^2 - 4(2)}}{2} = \frac{\sqrt{-8}}{2}$$

والآن :

$$m_1 = \frac{\sqrt{-8}}{2} = \frac{\sqrt{(-1)(2)(4)}}{2} = \frac{2}{2} \sqrt{2} \sqrt{-1} = \sqrt{2}i$$

معادلات الفروق

$$m_2 = \frac{\sqrt{-8}}{2} = \sqrt{2}i$$

من النتائج يتبين أن :

$$m_2 = a + bi = (0) - \sqrt{2}i, m_1 = abi = (0) + \sqrt{2}i$$

وبما أن النتائج تظهر بأن m_1, m_2 أعداداً مركبة إذن نطبق الحالة الثالثة للحل وهي:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(0)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan = \frac{a}{b} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

أو كبديل لذلك :

$$\sin \theta = \frac{a}{r} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\cos \theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

الفصل

ومن الجدول رقم (1-3) من الفصل الثالث يظهر بأن $\theta = 0$ وهذا يؤدي إلى أن يكون الحل الخامس

العام برمته صفراً وحيث يمكن إبدال a, b كل محل الآخر لأن الدالة المتشعبة دورية إذن تكون لدينا النتائج

التالية :

$$\tan = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{0} = \text{not defined}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

ومن الجدول رقم (1-3) أعلاه يتبين $\theta = \frac{\pi}{2}$ وبذلك يكون الحل العام :

$$y_x = r^x (c_1 \cos \theta x + c_2 \sin \theta x)$$

$$= (\sqrt{2})^2 (c_1 \cos \frac{1}{2} \pi x + c_2 \sin \frac{1}{2} \pi x)$$

مثال (4) :

جد الحل العام لمعادلة الفروق الآتية :

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} + 2y_x = 0$$

الجواب :

$$m^2 + A_1 m + A_2 = 0$$

حيث أن :

$$(A_1 = -2, A_2 = 2)$$

$$\therefore m^2 - 2m + 2 = 0$$

$$m_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4(2)}}{2} = \frac{2 + \sqrt{-4}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{-4}}{2} =$$

$$1 + \frac{\sqrt{(-1)(4)}}{2} = 1 + (1)\sqrt{-1} = 1 + i$$

$$m_2 = 1 - (1)\sqrt{-1} = 1 - i$$

ومن النتيجة أعلاه يظهر أن :

$$m_1 = a + bi = 1 + (1)i = 1 + i$$

$$m = a - bi = 1 - (1)i = 1 - i \quad \text{و}$$

معادلات الفروق

ويظهر أن $b = 1, a = 1$ وهكذا نستطيع استخراج r كالآتي :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = \frac{a}{b} = 1$$

ومن الجدول (1-3) من الفصل الثالث يظهر أن :

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\therefore y_x = (\sqrt{2})^x (c_1 \cos \frac{\pi}{4} x + c_2 \sin \frac{\pi}{4} x)$$

المسار الزمني لحل معادلة الفروق الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

Behavior of the solution sequence

9-5

يستند المسار الزمني لحل معادلة الفروق الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة (أو الفصل
كما سميناه سلوك تتابعيه الحل) على كل من المعادلة نفسها وعلى الشروط الأولية، وتؤثر جذور المعادلة
المساعدة حدود المسار الزمني للحل كما مبيّن في أدناه:
الحالة الأولى:

إذا كانت m_1, m_2 جذور حقيقية وغير متساوية ($m_1 \neq m_2$) وكانت القيمة المطلقة للجذر m_1
هي الأكبر، أي أن:

$$|m_1| > |m_2| \text{ إذن تكون حدود المسار الزمني للحل هي :}$$

($c_1 m_1^x + c_2 m_2^x$) هو نفسه $c_1 m_1^x$ بشرط أن $c_1 \neq 0$ وهذا يمكن إيضاحه عن طريق كتابة

$$\left(\frac{m_1}{m_2} \right)^x \rightarrow 0, -1 < \frac{m_1}{m_2} < 1 \text{ مادام } c_1 m_1^x + c_2 m_2^x = m_1^x \left[c_1 + c_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^x \right]$$

إذا ما $x \rightarrow \infty$

$$\frac{c_1 m_1^x}{c_1 m_1^x c_2 m_2^x} = \frac{c_1}{c_1 + c_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^x} \rightarrow \frac{c_1}{c_1} = 1 \text{ as } x \rightarrow \infty$$

ولهذا فإن حدود مسار $(c_1 m_1^x + c_2 m_2^x)$ هو نفسه حدود مسار $c_1 m_1^x$ إذا $|m_1| > |m_2|$.

إن حدود مسار $c_1 m_1^x$ كان قد شرح تفضيلاً في الفقرة (5-6) جدول رقم

(5-1) حيث تطرقنا فيها إلى المسار الزمني لحل معادلة فروق من المرتبة الأولى، مع ملاحظة إحلال m بدلاً من الموجودة في الجدول وكما يأتي:

إذا كانت $|m_1| \leq 1$ فإن المسار يقترب.

إذا كانت $|m_1| > 1$ فإن المسار يفترق. الحالة (6-9)

إذا كانت $-1 < m_1 < 0$ فإن المسار يتذبذب بتضاؤل ... الحالة (3)

أما إذا كانت $m < -1$ فإن المسار يتذبذب بلا حدود ... الحالة (8)

وإذا كانت $c = 0$ فإن مسار الحل هو $c_2 m_2^x$ كما أن نفس الاعتبارات صالحة للتطبيق على هذا

المسار ويلاحظ أيضاً:

إذا كانت $y_0 = c_2, y_1 = c_2 m_2, c_0$

الحالة الثانية:

إذا كانت m_1, m_2 جذور حقيقية متساوية أي أن $m_1 = m_2 = m$:

فإن الحل التتابعي أي المسار هو $[c_1 + c_2 x] m^x$ وهذا الحل يفترق إذا $|m| > 1$ باستثناء

$c_1 = c_2 = 0$ وكذلك يفترق إذا $|m| = 1$ باستثناء $c_2 = 0$

أما إذا $|m| < 1$ فإن المسار m^x يقترب من الصفر $[c_1 + c_2 x] m^x$ هو أيضاً يقترب من

الصفر، وإذا كانت m سالبة فإن المسار يتذبذب.

الحالة الثالثة :

إذا كانت الجذور مركبة أي أن :

$$m_1 = a + bi, m_2 = a - bi$$

فإن المسار يتذبذب. ويقترب من الصفر إذا $0 < \sqrt{a^2 + b^2} < 1$ ويفترق إذا

$$\sqrt{a^2 + b^2} > 1$$

والحالات الثلاثة أعلاه تغطي الأصناف المختلفة لمسار الحل لمعادلة الفروق الخطية المتجانسة من

المرتبة الثانية :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

ويكون الأمر كذلك حتى في حالات التي تكون فيها القيم كل c_1, c_2 ابتدائية نادرة، أو إذا كانت قيم

الاثنين صفراً.

إلا أنه هناك حالة واحدة يقترب فيها مسار حل معادلة الفروق الخطية المتجانسة من المرتبة

الثانية من الصفر إذا احتمل وجود أي زوج من القيم الابتدائية كما مبيّن في المبرهنة الآتية :

الفصل

مبرهنة :

إذا كانت $\lambda = \max(|m_1|, |m_2|)$ حيث أن m_1, m_2 هما جذرا المعادلة المساعدة لمعادلة الفروق

الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0 \quad \text{فإن} \quad \lambda < 1 \quad \text{هو شرط ضروري وكاف لسلوك الحل } \{y_x\} \text{ كي}$$

يقترب مع النهاية صفر لكل القيم الأولية (y_0, y_1) وبشكل أكثر تلخيصاً فإن الحالات الثلاث تبين حدود

λ :

الحالة الأولى :

m_1, m_2 قيم حقيقية وغير متساوية فإن :

$$\lambda = \max(|m_1|, |m_2|)$$

الحالة الثانية :

m_1, m_2 قيم حقيقية و متساوية : $m_1, m_2 = m$ فإن :

$$\lambda = |m|$$

الحالة الثالثة :

m_1, m_2 قيم مركبة أي أن :

$$m_1 = a + bi$$

$$m_2 = a - bi$$

فإن :

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$$

لنأخذ المثال التوضيحي الآتي :

في المثال رقم (1) في الفقرة السابقة وهو :

$$y_{x+2} + 5y_{x+1} + 4y_x = 0$$

وجد الحل العام لمعادلة الفروق أعلاه كان بالصيغة الآتية :

$$y_x = c_1 4^x + c_2 (1)^x$$

ومادام $m_1 = 4, m_2 = 1$ فهذا يعني أن $\lambda > 1$ وكذلك يعني أن : $|m| > 1$

ومن ذلك نستنتج بأن مسار الحل يفترق كما يظهر من حساب بعض القيم الأولى من الحل

الخاص للمعادلة وهي :

خذ :

$$y_x = \frac{4}{3}(4)^x + \frac{5}{3}(1)^x$$

ومن ذلك نستخرج :

$$y_0 = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$$

معادلات الفروق

$$Y_1 = \frac{4}{3}(4) + \left(\frac{5}{3}\right)(1) = 7$$

$$Y_2 = \frac{4}{3}(4)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)(1)^2 = 23$$

$$Y_3 = \frac{4}{3}(4)^3 + \left(\frac{5}{3}\right)(1)^3 = 87$$

وهكذا..

وتظهر النتائج أن سلوك مسار الحل يفترق نحو $+\infty$ كما في الحالة (6,9) من الجدول (5-1).

وفي المثال السابق رقم (2) السابق :

كان الحل العام هو :

$$Y_x = (c_1 + c_2 x)(-1)^x$$

$$\lambda = |m| = 1 \quad \text{فإن} \quad m_1 = -1, m_2 = -1$$

ومن ذلك يظهر أن سلوك مسار الحل يفترق لأن $|m| = 1$ كما مؤشر في الحالة (2). ودعنا نجد **الفصل**

الحل الخاص للمعادلة بهدف الوقوف على القيم الأولى للحل لنؤكد سلوكية الحل ولنفترض من أجل إيجاد **الخامس**

الحل الخاص أن :

$$Y_0 = 2, Y_1 = 0$$

فالحل الخاص يكون :

$$Y_0 = (c_1 + c_2(0))(-1)^0$$

$$\therefore 2 = c_1$$

$$Y_1 = (c_1 + c_2(1))(-1)^1$$

$$\therefore 5 = -c_1 - c_2$$

$$c_1 = 2$$

ومن المعادلة أعلاه نعوض قيمة $c_1 = 2$ ينتج :

$$5 + 2 = -c_2$$

$$\therefore c_2 = -7$$

والآن لنرى سلوك القيم الأولى من الحل الخاص للمعادلة :

$$y_0 = [2 - 7(0)](-1)^0 = 2$$

$$y_1 = [2 - 7(1)](-1)^1 = 5$$

$$y_2 = [2 - 7(2)](-1)^2 = -12$$

$$y_3 = [2 - 7(3)](-1)^3 = 19$$

$$y_4 = [2 - 7(4)](-1)^4 = -26$$

وهكذا...

وكما تبين النتائج أن سلوك مسار الحل هو الافتراق والتذبذب بلا حدود لان (m) سالبة كما مبين

في الحالة (8) من الجدول (5-1).

معادلات الفروق غير المتجانسة من المرتبة الثانية

Nonhomogeneous Second – Order Difference Equations

10-5

كما مر بنا سلفاً تكتب معادلة الفروق الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية كالآتي :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

وكان حلها هو y_x أما معادلة الفروق غير المتجانسة من المرتبة الثانية كالآتي :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = (g)$$

وإن حلها العام يكون $y_x + \bar{y}$ حيث أن \bar{y} هو أي حل خاص للمعادلة غير المتجانسة وإن صيغة \bar{y}

تعتمد على صيغة $g(x)$.

وهناك عدة طرق لاستخراج قيمة \bar{y} ومن ضمنها طريقة (عدم تحديد المعاملات) التي تتلخص في

أدناه :

طريقة عدم تحديد المعاملات

نفترض أن $g(x)$ ثابت ولنرمز له بالحرف k إذن :

$$(5-22) \quad y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = k$$

ونفترض أيضا أن $y_x = z_x$ هو الحل العام للمعادلة المتجانسة التالية :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

وبذلك نستطيع الوصول إلى حل المعادلة غير المتجانسة حسب الصيغة :

$$(5-23) \quad Y_x = Z_x + L$$

حيث أن L هو ثابت ، وبهذا تصبح المعادلة (5-22) بالصيغة :

$$(Z_{x+2} + L) + A_1(Z_{x+1} + L) + A_2(Z_{x+1} + L) = K$$

$$Z_{x+2} + A_1 Z_{x+1} + A_2 Z_{x+1} + (1 + A_1 + A_2)L = K$$

ولكن

$$Z_{x+2} + A_1 Z_{x+1} + A_2 Z_{x+1} = 0$$

الفصل

وذلك لأن Z_x هو حل المعادلة المتجانسة وبهذا ينتج :

الخامس

$$(1 + A_1 + A_2)L = K$$

$$(5-24) \quad \therefore L = \frac{K}{1 + A_1 + A_2}$$

ومن ذلك نستنتج بأن حل المعادلة غير المتجانسة يكون حسب الصيغة (5-23) بعد تعويض قيمة

L كما في (5-24) أي أن :

$$(5-25) \quad \therefore Y_x = Z_x \frac{K}{1 + A_1 + A_2}$$

ولإيضاح ذلك نتناول المثال الآتي :

مثال:

جد الحل العام لمعادلة الفروق الآتية :

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 12$$

وجد الحل الخاص للمعادلة إذا كانت القيم الأولية

$$y_1 = 42, y_0 = 20$$

الاجواب:

نشكل المعادلة المساعدة :

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

حيث أن $A_1 = -5, A_2 = 6$

$$(m - 3)(m - 2) = 0$$

$$\therefore m = 3$$

$$m_2 = 2 \quad \text{لو}$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة :

$$y_x = c_1 m_1^x + c_2 m_2^x$$

$$= c_1 (3)^x + c_2 (2)^x$$

والحل العام للمعادلة غير المتجانسة :

$$y_x = [c_1 m_1^x + c_2 m_2^x] + \frac{K}{1 + A_1 + A_2}$$

$$= c_1 (3)_1^x + c_2 (2)_2^x + \frac{12}{1 - 5 + 6}$$

$$\therefore y_x = c_1 (3)_1^x + c_2 (2)_2^x + 6$$

ولما كان

$$y_1 = 42, y_0 = 20$$

فإن الحل الخاص يكون :

$$y_0 = c_1(3)^0 + c_2(2)^0 + 6$$

$$20 = c_1 + c_2 + 6$$

$$\therefore c_1 + c_2 = 14$$

$$y_1 = c_1(3)^1 + c_2(2)^1 + 6$$

$$42 = 3c_1 + 2c_2 + 6$$

$$\therefore 3c_1 + 2c_2 = 36$$

ومن المعادلتين ينتج :

$$c_1 = 8$$

$$c_2 = 6$$

الفصل

إذن الحل الخاص هو :

الخامس

$$y_x = 8(3)^x + 6(2)^x + 6$$

وباستخراج بعض القيم الأولى من الحل الخاص نستنتج بأن مسار الحل يفترق نحو $-\infty$ وكما

يظهر من القيم الآتية :

$$y_0 = 20, y_1 = 42, y_2 = 102, y_3 = 270, \dots$$

مثال (2) :

جد الحل العام لمعادلة الفروق الآتية :

$$y_{x+1} - 8y_{x+1} - 9y_x = 24$$

ثم جد الحل الخاص إذا كانت

$$y_1 = 0, y_0 = 2$$

الجواب:

حيث أن $A_1 = -8, A_2 = -9$ إذن نشكل المعادلة المساعدة وهي:

$$m^2 - 8m - 9 = 0$$

ومنها نستخرج:

$$m_1 = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2} = \frac{-1(-8) + \sqrt{(-8)^2 - 4(-9)}}{2}$$

$$= \frac{8 + \sqrt{100}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$m_2 = \frac{8 - 10}{2} = -1$$

إذن بذلك يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو:

$$y_x = c_1 m_1^x + c_2 m_2^x$$

$$= c_1 (9)^x + c_2 (-1)^x$$

أما الحل العام للمعادلة غير المتجانسة فهو:

$$y_x = [c_1 m_1^x + c_2 m_2^x] + \frac{K}{1 + A_1 + A_2}$$

$$= c_1 (9)^x + c_2 (-1)^x + \frac{24}{1 - 8 + 9}$$

$$\therefore y_x = c_1 (9)^x + c_2 (-1)^x - \frac{3}{2}$$

$$y_0 = c_1 (9)^0 + c_2 (-1)^0 - \frac{3}{2}$$

$$2 = c_1 + c_2 - \frac{3}{2}$$

معادلات الفروق

$$y_1 = c_1(9)^1 + c_2(-1)^1 - \frac{3}{2} \quad \text{و}$$

$$0 = 9c_1 - c_2 - \frac{3}{2}$$

ومن المعادلتين :

$$c_1 + c_2 = \frac{7}{2}$$

$$9c_1 + c_2 = \frac{3}{2}$$

نحصل على :

$$c_1 = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = 3 \quad \text{و}$$

الفصل

إذن الحل الخاص هو :

الخامس

$$y_x = \frac{1}{2}(9)^x + 3(-1)^x - \frac{3}{2}$$

تمارين (1 - 10)

1- جد الحل العام لمعادلات الفروق الآتية :

$$y_{x+2} - 6y_{x+1} + 5y_x = 0 \quad (\text{أ})$$

$$y_{x+2} + 3y_{x+1} + 3y_x = 0 \quad (\text{ب})$$

$$y_{x+2} + 4y_{x+1} + y_x = 0 \quad (\text{ج})$$

2- جد الحل العام لمعادلات الفروق الآتية ثم جد الحل الخاص استناداً إلى القيم الأولية المبينة

إزاء كل منها :

$$(\text{أ}) \quad y_{x+2} - 8y_{x+1} + 12y_x = 18 \quad \text{و} \quad y_0 = 2, y_1 = 0$$

$$(ب) \quad y_0 = 1, y_1 = 3 \text{ و } y_{x+2} - 4y_{x+1} - y_x = 12$$

$$(ج) \quad y_0 = 0, y_1 = 4 \text{ و } y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = 4$$

$$(د) \quad y_0 = 3, y_1 = 5 \text{ و } 3y_{x+2} - 10y_{x+1} + 6y_x = 15$$

ملحق الفصل الخامس

الأعداد المركبة

5-11

5-11-1 العدد المركب

ذكرنا في الفصل الأول من الجزء الأول من الكتاب في الفقرة (1-1-1) ، أن الأعداد التي على صورة

$(a+bi)$ حيث أن a, b أعدادا حقيقية أما $i = \sqrt{-1}$ هي أعداد مركبة حيث يسمى (a) بالجزء الحقيقي و

(bi) الجزء الخيالي. مثال ذلك عند حل المعادلة:

$$x^2 - 2x + 10 = 0$$

بموجب طريقة الدستور هو:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(10)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{136}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{(36)(-1)}}{2}$$

$$= 1 + 3\sqrt{-1}$$

وهنا يظهر أن صورة العدد المركب $a + bi = 1 + 3\sqrt{-1}$ ومنها نستنتج أن $a = 1$ وهو العدد

حقيقي $bi = 3\sqrt{-1}$ وهو الجزء الخيالي وحيث أن $i = \sqrt{-1}$.

5-11-2 بعض خصائص الأعداد المركبة

أ- جمع العددين المركبين

إذا كان

$$u = a + bi, v = c + di$$

فإن

$$u + v = (a + bi) + (c + di)$$

$$= a + bi + c + di$$

$$= a + c + (b + d)i$$

ب- ضرب العددين المركبين

إذا كان

الفصل

$$u = a + bi, v = c + di$$

الخامس

فإن

$$uv = (a + bi)(c + di)$$

$$= ac + adi + bci + bdi^2$$

وحيث أن

$$i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$$

$$(5-26)$$

$$\therefore uv = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

ج- مرافق العدد المركب

إذا كان $a + bi$ عدداً فإن العدد المركب $a - bi$ يسمى مرافق للعدد المركب الأول ويكون :

$$(5-27)$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2$$

د- قسمة العددين المركبين

من النتيجة التي حصلنا عليها في الفقرة (ب) والفقرة (ج) أعلاه نستطيع إجراء عملية قسمة أي عددين مركبين ولنأخذ المثال الآتي :

$$\frac{2-4i}{5+i}$$

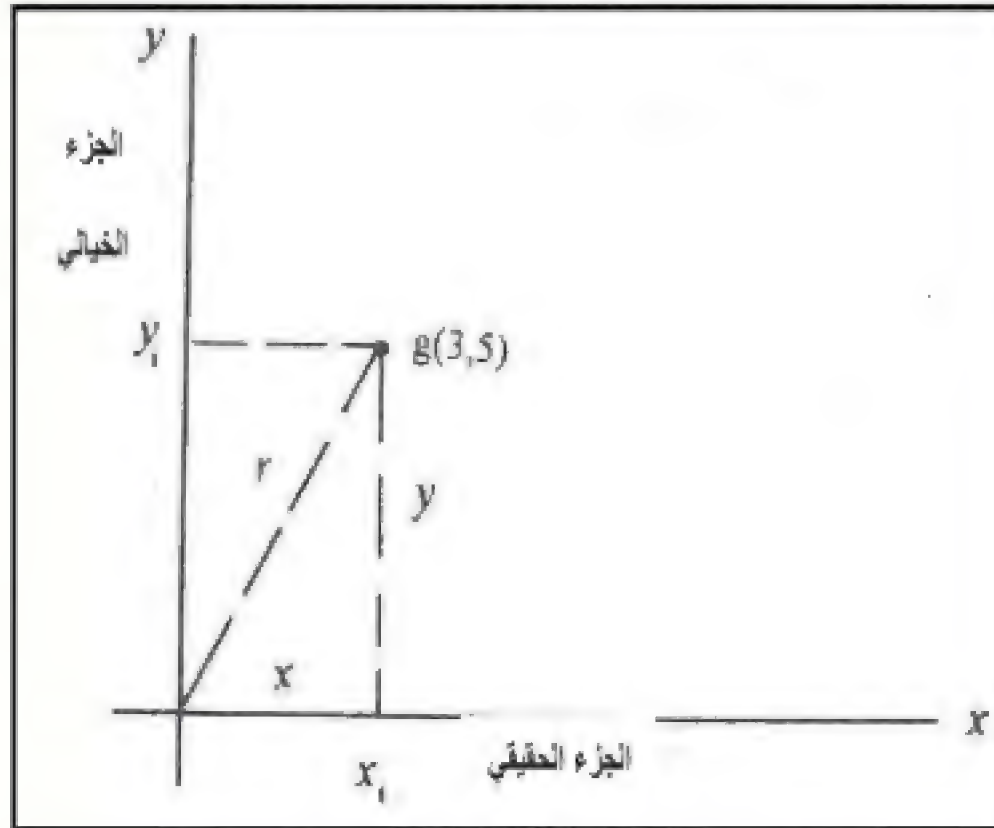
بالضرب في مرافق المقام وهو $(5-i)$ نحصل على :

$$\frac{2-4i}{5+i} = \frac{(2-4i)(5-i)}{(5-i)(5-i)} = \frac{(10-4) + (-2-20)i}{25+1} = \frac{6-22i}{26}$$

5-11-3 تمثيل الأعداد المركبة

يمكن تمثيل العدد المركب $a+bi$ عن طريق الزوج المرتب (a,b) في الإحداثيات المتعامدة على شكل نقط وذلك باعتبار المحور x ممثلاً للجزء الخيالي من العدد.

فالعدد المركب $3+5i$ يمثل بالنقطة $g(3,5)$ كما موضح في الشكل رقم (5-4) أدناه



والآن إذا انتقلنا من تمثيل $a+bi$ عن طريق الإحداثي العمودي وبالنقطة $g(x,y)$ إلى

الإحداثيات القطبية وذلك باعتبار أن طول $hg = r$

معادلات الفروق

وإذا ما عدنا إلى الفقرة (3-7-5) حيث نظام الإحداثيات القطبية نجد أن :

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{و} \quad x = r \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \text{و} \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و}$$

وعلى هذا الأساس كتابة العدد المركب :

$$\begin{aligned} x + yi &= r \cos \theta + r \sin \theta \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned} \quad (5-28)$$

وتسمى r مقياس العدد المركب و θ بسعة $x + yi$ أما

فتسمى بالصيغة القطبية للعدد المركب أو الصيغة المثلثية.

لنأخذ الأمثلة الآتية :

مثال (1) :

الفصل

الخامس

ضع العدد المركب الآتي : $4 + 3i$ بالصيغة القطبية :

الجواب :

$$r = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\sin \theta = \frac{3}{5} = 0.6 \quad \text{و}$$

ومن الجداول نحصل على قيمة $\theta = 36^\circ$ تقريباً

إذن العدد المركب $(\cos 36^\circ + i \sin 36^\circ)$ $4 + 3i$

مثال (2) :

ضع العدد المركب $6(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ بموجب الصيغة $a + bi$

الجواب :

من الجداول نجد أن :

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 6(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) &= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) \\ &= 3\sqrt{3} + 3i \end{aligned}$$

5-11-4 جمع الأعداد المركبة بالصيغة القطبية

إذا كان

$$N_1 = a + bi = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$N_2 = c + di = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \quad \text{و}$$

فإن :

$$(10-29) \quad N_1 + N_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) + r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

5-11-5 ضرب الأعداد المركبة بالصيغة القطبية

إذا كان

$$N_1 = a + bi = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$N_2 = c + di = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \quad \text{و}$$

فإن :

$$N_1 N_2 = (a + bi)(c + di)$$

$$\begin{aligned}
 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \quad \text{و} \\
 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\
 &\quad \text{وحيث أن: } i^2 = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = -1 \text{ وبإعادة الصياغة ينتج:} \\
 &N_1 N_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) \\
 &\quad (10-30) \quad r_1 r_2 = [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]
 \end{aligned}$$

وبلاحظ أن مقياس حاصل ضرب عددين مركبين يساوي ضرب مقياسي العددين $(r_1 r_2)$ وأن سعة حاصل الضرب تساوي مجموع سعتي العددين.
وإذا كانت لدينا:

$$N_3 = r_3 (\cos \theta_3 + i \sin \theta_3)$$

فإن:

$$N_1 N_2 N_3 = r_1 r_2 r_3 [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)]$$

وإذا استمرت عملية الضرب حتى من الأعداد المركبة يكون الناتج:

الخامس

$$N_1 N_2 N_3 \dots N_n = r_1 r_2 r_3 \dots r_n \left[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots \theta_n) \right]$$

وبافتراض أن

$$r = r_1 = r_2 = r_3 \dots \dots \dots = r_n$$

وأن

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta_n$$

فإن

$$(10-31) \quad = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n$$

مثال:

جد مقياس وسعة العدد المركب كالاتي :

$$\left[2\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right) \right]^4$$

الجواب:

$$\begin{aligned} \left[2\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right) \right]^4 &= 2^4 \left(\cos \frac{4\pi}{8} + i \sin \frac{4\pi}{8}\right) \\ &= 16\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

وبذلك فإن :

مقياس العدد المركب يساوي : $r^n = 16$

وسعة العدد المركب يساوي : $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

5-11-6 أيجاد الجذور المركبة في معادلات الفروق

بعد أن استعرضنا الأعداد المركبة وخصائصها الرئيسية نناقش بشكل مختصر الحل العام لمعادلة

الفروق إذا كان يحتوي على جذور مركبة ولنفترض بأن لدينا المعادلة الآتية :

$$(5-32) \quad y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

$$y_1 = c, y_0 = b \quad \text{و}$$

وكانت الجذور m_1, m_2 التي تفي بمتطلبات المعادلة المساعدة هي أعداد مركبة وبذلك نستطيع

كتابة الحل العام للمعادلة كما يأتي :

$$(5-33) \quad y = g m_1^x + L m_2^x$$

(لغرض المتابعة انظر الفقرة 5-8 الحالة الأولى)

افترضنا بأن :

$$m_1 = a + bi, m_2 = a - bi$$

إذن :

تكون الصيغة القطبية المبيّنة في (5-28) كالآتي :

$$a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$a - bi = r(\cos \theta - i \sin \theta) \quad \text{و}$$

حيث أن :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

وتذكر مبرهنة ديموافر المذكورة في الصيغة (5-31) وهي :

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

إذن يمكن كتابة الحل العام بالصيغة التالية بعد إحلال x محل n :

الفصل

$$y_x = g[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^x + L[r(\cos \theta - i \sin \theta)]^x$$

الخامس

$$= g[r^x (\cos x\theta + i \sin x\theta)]^x + L[r^x (\cos x\theta - i \sin x\theta)]$$

$$= gr^x \cos x\theta + gr^x i \sin x\theta + Lr^x \cos x\theta - Lr^x i \sin x\theta$$

$$(5-34) \quad y_x = r^x [(g + L) \cos x\theta + i(g - L) \sin x\theta]$$

والآن نحتاج لشرط مفاده أن (g, L) هما زوجان مترافقان من الأعداد المركبة كي نؤكد بأن y_x هو

عدد حقيقي. وهذا الشرط يتوفر في ضوء المبرهنة الآتية :

مبرهنة:

إذا كان m_1, m_2 زوجان مترافقان من الأعداد المركبة في المعادلة $y_x = gm_1^x + Lm_2^x$ فإن :

γ تكون عدداً حقيقياً إذا كانت L و g أزواجاً متوافقة من الأعداد المركبة ويمكن مراجعة إثبات هذه المبرهنة عند الحاجة في كتاب أكولد بيرج - مدخل إلى معادلات الفروق صفحة (139).
والآن لنعد إلى صيغة الحل العام كما في (5-34) ونفترض أن :

$$g + L = c_1$$

$$i(g - L) = c_2 \quad \text{و}$$

وبذلك تصبح الصيغة (5-34) بالصورة الآتية :

$$y_x = r^x (c_1 \cos \theta x + c_2 \sin \theta x)$$

وهي كما في الصيغة المعطاة في (5-21)

الفصل السادس

معادلات الفروق

والنماذج الاقتصادية

معادلات الفروق والنماذج الاقتصادية

مقدمة

1-6

تستخدم معادلات الفروق في بناء النماذج الاقتصادية المتحركة أي التي تتغير بتغير الوقت أما النماذج التي تستبعد الزمن فهي نماذج ساكنة. ومن النماذج المتحركة ما هو بسيط ويحتوي على معادلات فروق من المرتبة الأولى حيث يظهر المتغير المعتمد كدالة للمتغير نفسه في فترة سابقة. وهناك نماذج تحتوي على معادلات فروق من المرتبة الثانية أي أن المتغير المعتمد يكون دالة للمتغير نفسه خلال الفترتين السابقتين المتعاقبتين. كما تبرز النماذج أشكالاً من العلاقات بين المتغيرات داخل النموذج الواحد. وستناول بعض من النماذج المذكورة ونبدأ بالتي تحتوي على معادلات من المرتبة الأولى ومن ثم ننقل إلى تلك التي تحتوي على معادلات من المرتبة الثانية.

نموذج العنكبوت Cobweb Model

2-6

الفصل

من المواضيع المهمة في دراسة العرض والطلب هو كيفية إجراء التكيف بين الاثنين وفق النموذج الآتي:

السادس

$$\text{العرض: } Q_t = a + bP_{t-1} \quad (6-1)$$

$$\text{الطلب: } P_t = c + dQ_t \quad (6-2)$$

حيث أن: $Q_0 = Q_0$ قيمة معروفة عندما $t = 0$

وإن Q تمثل الكميات المعروضة والمطلوبة و P سعر و t الزمن أما a, b, c, d فهي معالم ثابتة. وإن:

$$a > 0, b > 0, c > 0$$

أما $d < 0$ (بسبب تناسب الطلب مع السعر باتجاه عكسي)

ويبين النموذج أن كلاً من Q, P هما دالتان للزمن (t) وندمج المعادلة الثانية بالأولى ينتج:

$$Q_t = a + b(c + dQ_{t-1})$$

حيث أخذت: $P_{t-1} = c + dQ_{t-1}$ (المعادلة الثانية بفترة تباطؤية واحدة)

وبإعادة الترتيب:

$$\therefore Q_t = a + bc + bdQ_{t-1}$$

ولتسهيل حل النموذج وبما أن a, b, c, d ثوابت نفرض أن:

$$g_1 = bd, g_2 = a + bc$$

وبذلك تصبح المعادلة حسب الصيغة الآتية:

$$Q_t = g_1 Q_{t-1} + g_2$$

$$Q_{t-1} = g_1 Q_{t-2} + g_2 \quad \text{لـ}$$

وإن حل المعادلة هذه يتم وفق الطريقة المذكورة في (5-9) وكما يأتي:

إذا كانت $g_1 \neq 1$ فإن الحل العام يكون:

$$Q_t = g_1^t Q_0 + g_2 \left(\frac{1 - g_1^t}{1 - g_1} \right)$$

أما إذا كانت $g_1 = 1$ فإن الحل العام يكون حسب الصيغة (5-10)

$$Q_t = Q_0 + g_2 t$$

$$g_1 = bd, g_2 = a + bc \quad \text{لـ}$$

لذا يكون الحل العام للصيغة هو:

$$Q_t = (bd)^t Q_0 + (a + bc) \frac{1 - (bd)^t}{1 - bd} \quad \text{إما}$$

$$Q_t = Q_0 + (a + bc)t \quad \text{أو}$$

وما يهمنا معرفته هو سلوكية مسار الحل. فما دام $d < 0$, $b > 0$ فإن حاصل ضربيهما يساوي $bd < 0$ ولهذا فإن سلوك مسار الحل هو دائماً متذبذب. والآن نذهب لتحديد نقطة التوازن (P^*, Q^*) والصيغة (5-16) تعطينا قيمة التوازن:

$$Q^* = \frac{g_2}{1 - g_1} = \frac{a + bc}{1 - bd}$$

أما قيمة التوازن P^* فتتطلب حل النموذج بتعويض المعادلة الأولى بالثانية لينتج:

$$P_{t+1} = c + ad + bdP_t$$

ويكون الحل العام:

$$P_t = (bd)^t P_0 + (c + ad) \left(\frac{1 - (bd)^t}{1 - bd} \right)$$

ومنه نحصل على:

$$p^* = \frac{g_2}{1 - g_1}, \frac{a - bc}{1 - bd}$$

الفصل

وإن نقطة التوازن:

السادس

$$(6-3) \quad (P^*, Q^*) = \left(\frac{c + ad}{1 - bd}, \frac{a - bc}{1 - bd} \right)$$

ومادامت $bd < 0$ فإن السلوكيات الآتية تظهر في المسار الزمني:

إذا كانت $-1 < bd < 0$ فإن المسار P_t, Q_t يقترب من نقطة التوازن بتذبذب متضائل أي

الحالة (6) من الجدول (5-1).

إذا كانت $bd = 1$ فإن المسار يفترق بتذبذب محدود كما في الحالة (7) من الجدول.

أما إذا كانت $bd < -1$ فإن المسار يفترق بتذبذب غير محدود كما تشير الحالة (8) من الجدول.

ولهذا لا يكون هناك توازن مستقر إلا إذا كانت $-1 < bd < 0$

11-3 نموذج هارود Harrod Model

يعتبر هذا النموذج من النماذج الاقتصادية الكلية التي تتحدث عن تحليلات الدخل الوطني والنمو الاقتصادي وتتكون معادلاته كما وصفها هارود^{*} من الآتي:

$$S_t = \alpha y_t$$

$$I_t = \beta(y_t - y_{t-1})$$

$$S_t = I_t$$

$$y_0 = y_0$$

قيمة معرفة عند (t = 0)

حيث أن s يمثل الادخار و y تمثل الدخل و I الاستثمار وكل من هذه المتغيرات هو دالة للزمن t وندمج المعادلات الثلاثة ينتج:

$$\alpha y_t = \beta(y_t - y_{t-1})$$

وبإعادة الصياغة نحصل على:

$$\beta y_{t-1} = \beta y_t - \alpha y_t$$

$$= y_t(\beta - \alpha)$$

$$\therefore y_t = \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right) y_{t-1}$$

ويكون الحل العام حسب الصيغة (5-9) وهي:

$$y_t = A^t y_0 + B \frac{1 - A^t}{1 - A}$$

حيث أن:

^{*} هارود (Roy F. Harrod) اقتصادي إنكليزي ولد عام (1900) من أبرز إنتاجه كانت عن الاقتصاد المتحرك والدورة التجارية وتفاعل المعجل والمضاعف ونحو سياسة اقتصادية جديدة ومواضيع أخرى ومن أهم هذه الكتابات هو نموذج عيشت النمو الاقتصادي الذي وضعه بمعزل عن دوماز ولكن جاء النموذجان متشابهان ولهذا سمي باسميهما.

$$A = \frac{\beta}{\beta - \alpha}, B = 0$$

فبعد إحلال t محل x يكون الحل العام كالآتي:

$$\begin{aligned} y_t &= \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right)^t y_0 + (0) \left(\frac{1 - A^t}{1 - A}\right) \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right)^t y_0 \end{aligned}$$

وبما أن:

$$I_t = S_t = \alpha y_t$$

$$\therefore I_t = S_t = \alpha \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right)^t y_0$$

وبما أن الدخل يفترض به أن يكون موجبا أي $y_t > 0$ فإن سلوك المسار الزمني للحل يعتمد على الفصل

السادس قيمة $\left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right)$ ، أما إذا كان y غير سالب فإن:

$$\frac{\beta}{\beta - \alpha} \geq 0 \text{ وحيث يشترط النموذج أن } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ ولهذا فإن:}$$

$$\frac{\beta}{\beta - \alpha} > 1 \text{ وحيث أن } y^* = \frac{\beta}{1 - A} \text{ من العلاقة (10-12) وكما ذكرنا أعلاه فإن}$$

$$A = \frac{\beta}{\beta - \alpha}, B = 0 \text{ لهذا فإن:}$$

$$y^* = \frac{0}{\frac{\beta}{\beta - \alpha}} = 0$$

ومن ملاحظة الجدول (5-1) والنتائج أعلاه يتبين المسار الزمني (y_t) يتزايد

باضطراب ويفترق باتجاه $+\infty$ أي الحالة رقم (2) من الجدول (5-1) أعلاه. ومادامت

$\infty > 0$. فإن المسار It والمسار se هما أيضاً يتزايدان باضطراد ويفترقا نحو ∞ وبذلك يتضح بأنه لا قيم توازيه لأي متغير في هذا النموذج.

6-4 نموذج الاستهلاك Consumption Model

يفترض هذا النموذج أن الدخل الوطني يتوزع بين الاستهلاك والادخار في اقتصاد مغلق لا توجد فيه تجارة خارجية كما يفترض النموذج أن الاستهلاك دالة الدخل وأن الدخل دالة للادخار. وحيث أن النموذج هو نموذج متحرك يعتمد على مسار الزمن فإن كل من الاستهلاك والادخار والدخل هي في النهاية دوال للزمن (t) ويبدو النموذج بشكله البسيط كالآتي:

$$C_t + S_t = y_t \quad (1)$$

$$y_t = \alpha S_{t-1} \quad (2)$$

$$C_t = \beta y_t \quad (3)$$

$y_0 = y_0$ قيمة معروفة عندما $t = 0$

حيث أن β هو الميل الحدي للاستهلاك و α معلمة ثابتة. وعند تعويض المعادلة (2) والمعادلة (3) في المعادلة (1) بعد إعادة كتابة المعادلة الثانية كالآتي:

$$S_t = \frac{y_{t+1}}{\alpha} \text{ و } y_{t+1} = \alpha S_t \text{ ينتج:}$$

$$\beta y_t + \frac{y_{t+1}}{\alpha} = y_t$$

وبإعادة الصياغة:

$$\beta \alpha y_t + y_{t+1} = \alpha y_t$$

$$\therefore y_{t+1} = \alpha y_t - \beta \alpha y_t$$

$$y_{t+1} = \alpha(1 - \beta) y_t$$

ويكون الحل العام حسب الصيغة (5-9) كالآتي:

$$y_t = (\alpha - \alpha\beta)^t y_0 \quad (4)$$

وبتعويض ذلك في معادلة الاستهلاك (3) أعلاه نحصل على:

$$C_t = \beta(\alpha - \alpha\beta)^t y_0 \quad (5)$$

وحيث نستنتج من المعادلة (3) بأن:

$$C_0 = \beta y_0 \quad (6)$$

وبتعويض العلاقة (6) في المعادلة (5) ينتج:

$$C_t = (\alpha - \alpha\beta)^t C_0 \quad (7)$$

أما الادخار S_t فيعالج كالآتي:

من المعادلة (1) لدينا:

$$S_t = y_t - C_t \quad (8)$$

وبتعويض المعادلتين (4) و(5) في المعادلة (8) ينتج:

$$S_t = (\alpha - \alpha\beta)^t y_0 - \beta(\alpha - \alpha\beta)^t y_0$$

وبإعادة الصياغة نحصل على:

$$S_t = (1 - \beta)(\alpha - \alpha\beta)^t y_0 \quad (9)$$

ومن المعادلة (1) لدينا:

$$S_0 = y_0 - c_0$$

وبتعويض المعادلة (6) في المعادلة أعلاه ينتج:

$$S_0 = y_0 - \beta y_0$$

$$S_0 = (1 - \beta) y_0$$

$$y_0 = \frac{S_0}{(1 - \beta)} \quad \text{أو}$$

الفصل

السادس

وبتعويض ذلك في المعادلة (9) ينتج:

$$S_t = (1 - \beta)(\alpha - \alpha\beta)^t \frac{S_0}{(1 - \beta)} \quad (10)$$

$$\therefore S_t = (\alpha - \alpha\beta)^t S_0$$

وبذلك يكون حل النموذج برمته مكون من المعادلات (4) و (7) و (10) وكما يأتي:

$$y_t = (\alpha - \alpha\beta)^t y_0$$

$$c_t = (\alpha - \alpha\beta)^t C_0$$

$$s_t = (\alpha - \alpha\beta)^t S_0$$

أما المسار الزمني فيأخذ الحالات التالية كما مؤشر في الجدول (5-1):

إذا كانت $\alpha - \alpha\beta > 1$ تزايد باضطراد وافتراق نحو $+\infty$ الحالة (2) من الجدول.

إذا كانت $0 < \alpha - \alpha\beta < 1$ تناقص باضطراد وتقارب نحو y^* الحالة (4) من الجدول.

إذا كانت $\alpha - \alpha\beta = 1$ ثابت كما في الحالة (9) من الجدول.

نموذج الدخل - الاستهلاك - الاستثمار

6-5

Income – Consumption – Investment Model

تناولنا في الفصل الرابع الفقرة (4-6) نموذج الدخل - الاستهلاك - الاستثمار وكانت الزمن (t)

مستمراً في النموذج ولكن عندما يصبح الزمن متقطع يتحول النموذج إلى معادلات فروق بعد أن كان معادلات تفاضلية وذلك كما مبين أدناه:

$$C_t = \alpha y_t + \beta \quad (1)$$

$$I_t = e y_t + d \quad (2)$$

$$\Delta y_{t-1} = \lambda [c_{t-1} + I_{t-1} - y_{t-1}] \quad (3)$$

قيمتة معلومة في بداية الفترة عندما $t=0$ $y_0 = Y_0$

$\alpha > 0, e > 0, \lambda > 0$ وقبل حل هذا النموذج نعيد صياغته كما مبين أدناه:

$$\Delta y_{t-1} = y_t - y_{t-1}$$

وبالتعويض ذلك في المعادلة (3) ينتج:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda [C_{t-1} + I_{t-1} - y_{t-1}]$$

$$y_t = \lambda [C_{t-1} + I_{t-1}] - \lambda y_{t-1} + y_{t-1}$$

$$y_t = \lambda [C_{t-1} + I_{t-1}] + (1 - \lambda)y_{t-1} \quad (4)$$

وبتعويض المعادلتين (1)، (2) في المعادلة (4) بعد وضعها بصيغة تباطؤية واحدة أي:

$$C_{t-1} = \alpha Y_{t-1} + B$$

$$I_{t-1} = e Y_{t-1} + d$$

نحصل على:

الفصل

السادس

$$Y_t = \lambda [\alpha Y_{t-1} + B + e Y_{t-1} + d] + (1 - \lambda)Y_{t-1}$$

$$= \lambda (\alpha Y_{t-1} + e Y_{t-1}) + (1 - \lambda)Y_{t-1} + \lambda (B + d)$$

$$= \lambda (\alpha + e)Y_{t-1} + (1 - \lambda)Y_{t-1} + \lambda (B + d)$$

$$= [\lambda (\alpha + e) + (1 - \lambda)]Y_{t-1} + \lambda (B + d) \quad (5)$$

ولغرض استخراج الحل العام نتذكر الصيغة (5-9) لحل معادلة الفروق الخطية من المرتبة الأولى

ذات المعاملات الثابتة حيث تشير الصيغة (5-9) إلى أن الحل هو:

$$Y_s = A^s Y_0 + B \left(\frac{1 - A^s}{1 - A} \right)$$

ونحصل على الحل العام للمعادلة (5) كما يلي:

$$Y_0 = [\lambda(\alpha + d) + (1 - \lambda)]^t Y_0 + \lambda(B + d) \frac{1 - [\lambda(\alpha + d) + (1 - \lambda)]^t}{1 - [\lambda(\alpha + d) + (1 - \lambda)]} \quad (6)$$

وهذا النموذج يكون مستقراً إذا توفرت الشروط الآتية:

$$-1 < \lambda(\alpha + d) + (1 - \lambda) < 1 \quad \text{في الجدول (5-1)}$$

$$-\frac{1}{\lambda} < \alpha + d + \frac{1}{\lambda} - 1 < \frac{1}{\lambda}$$

$$1 - \frac{2}{\lambda} < \alpha + d < 1$$

ولكن ما دامت $\alpha + d > 0$ من تعريف النموذج، ومن نتائج التطبيق يتضح أن $\lambda < 2$ وذلك

لأن الاستجابة لحالة عدم توازن العرض والطلب لا يحتمل أن ينتج عنها تغيراً في العرض مساوياً مرتين حجم التناقص الموجود.

ولهذا فإن حالة الاستقرار تحصل عندما $\alpha + d < 1$ كما لاحظنا ذلك في النموذج عندما كان

بصيغة المعادلة التفاضلية.

6-6 نموذج متزلى في المخزون Metzler Inventory Model

يتعرض هذا النموذج الذي وضعه (متزلى) لدورة الخزين ويتكون من معادلات الفروق الآتية:

$$Y_t = U_t + S_t + V_0 \quad (1)$$

$$U_t = \beta Y_{t-1} \quad (2)$$

$$S_t = \beta(Y_{t-1} + Y_{t-2}) \quad (3)$$

$$0 < \beta < 1$$

حيث أن Y_t هو الدخل المنتج في الفترة t ، U_t هو سلع الاستهلاك المنتجة

لأغراض البيع في الفترة t ، S_t هو سلع الاستهلاك المنتجة لأغراض الخزن في الفترة t ، I_0 فهو صافي الاستثمار المستقل الثابت في كل فترة.

ويظهر من النموذج أن مجموع الدخل المنتج خلال أية فترة هو مجموع سلع الاستهلاك مضافا إليه صافي الاستثمار. كما يشير النموذج إلى أن السلع المنتجة خلال أية فترة هي نسبة من الدخل المنتج في الفترة السابقة. أما الإنتاج المعد للخزن فيساوي الفرق بين السلع المعدة للبيع فعلا وتلك المتوقعة في الفترة السابقة وهذا يعني أن النموذج يحاول أن يبقى المخزون في مستوى ثابت. ويفترض أيضا أن المخزون كاف لمواجهة الفروقات بين الإنتاج والطلب الاستهلاكي.

والآن وقبل حل النموذج نقوم بإعادة ترتيب المعادلات وكما يأتي:

نعوض المعادلتين (2) و (3) في المعادلة (1) فنحصل على:

$$Y_t = \beta Y_{t-1} + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + V_0 \quad (4)$$

$$Y_t - 2\beta Y_{t-1} + \beta Y_{t-2} = V_0 \quad (5)$$

الفصل ودون المساس بهيكل المعادلة الأخيرة يمكن تغير بداية الفترة t لتبدأ من $t = 0$ فينتج:

السادس
$$Y_{t+2} - 2\beta Y_{t+1} + \beta Y_t = V_0 \quad (6)$$

والمعادلة (6) هي معادلة فروق خطية غير متجانسة ولحلها نتبع الخطوات المذكورة في الفترة (

5-10) في الفصل العاشر وكما يأتي:

نفترض أن المعادلة أعلاه متجانسة كمرحلة أولى وذلك بافتراض أن:

$$V_0 = C \quad (\text{أي ثابت})$$

فنكون المعادلة المساعدة كالآتي:

$$M^2 - 2\beta M + \beta = 0$$

$$M_1 = \frac{2\beta + \sqrt{4\beta^2 + 4\beta}}{2} = \frac{2\beta + 2\sqrt{\beta^2 + \beta}}{2} = \beta + \sqrt{\beta^2 + \beta}$$

$$M_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 + \beta}$$

وحيث أن النموذج يشترط أن $0 < B < 1$ مما يقتضي:

$$\beta^2 - \beta < 0$$

وبذلك يتضح أن الجذور هي أعداد مركبة كما مبين أدناه:

$$M_1 = \beta + \sqrt{(-1)(\beta - \beta^2)} = \beta + \sqrt{-1} \sqrt{\beta(1 - \beta)}$$

$$\therefore M_1 = \beta + i \sqrt{\beta(1 - \beta)}$$

$$M_2 = \beta - i \sqrt{\beta(1 - \beta)}$$

ولغرض استخراج r يلاحظ أن $a = \beta$ و $b = \sqrt{\beta(1 - \beta)}$

والآن نستطيع استخراج: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ الواردة في المعادلة (5-21) كي نحصل على:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\beta^2 + \beta(1 - \beta)}$$

$$\therefore r = \sqrt{\beta^2 - \beta^2 + \beta} = \sqrt{\beta} \quad (7)$$

3

$$\cos \theta = \frac{\beta}{r} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\beta}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{\beta(1 - \beta)}}{r} = \frac{\sqrt{\beta} \sqrt{1 - \beta}}{r} = \sqrt{1 - \beta}$$

وبهذا يكون حل معادلة الفروق المتجانسة:

$$Y_{t+2} - 2\beta Y_{t+1} + \beta Y_t = V_0$$

هو حسب الصيغة (5-21) الآتية:

$$Y_x = r^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

وبعد إحلال t محل x وكالاتي:

$$Y_t = (\sqrt{\beta})' (C_1 \cos X + C_2 \sin X) \quad (8)$$

والآن ننتقل إلى الحل العام للمعادلة الفروق غير المتجانسة ونذكر الصيغة (5-22) التي تقول أن

الحل العام يتكون من الحل العام للمعادلة المتجانسة مضافا إليه ثابت معين كما مبين أدناه:

$$Y_x = Z_x + L$$

حيث أن Z_x هو الحل العام للمعادلة المتجانسة كما هو في (8) و L كما ورد في الصيغة (5-24)

(يساوي:

$$L = \frac{K}{1 + A_1 + A_2}$$

وحيث أن K هنا تساوي V_0 وقيمة A_1 , A_2 تؤخذ من المعادلة (6) أي أن:

$$A_1 = -2\beta \quad , \quad A_2 = \beta$$

ومن ذلك نحصل على قيمة L لتساوي:

الفصل

$$L = \frac{V_0}{1 - 2\beta + \beta} = \frac{V_0}{1 - \beta}$$

السادس

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة هو:

$$(6-4) \quad Y_t = (\sqrt{\beta})' (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{V_0}{1 - \beta}$$

ويؤدي الحدان اللذان يحتويان على الجيب تمام (\cos) والجيب (\sin) إلى تقلبات دورية بسبب

تذبذب هذين الحدين بين القيمة الموجبة والقيمة السالبة إلا أن هذه التقلبات يتم إخمادها (أي إنها

تتضاءل) عن طريق العامل $(\sqrt{\beta})'$ ما دام $(0 < \beta < 1)$ ولهذا فإن:

$$(\sqrt{\beta})' (C_1 \cos x + C_2 \sin x) \rightarrow 0$$

عندما $t \rightarrow \infty$ لان $(\sqrt{\beta})^t \rightarrow 0$ للأسباب أعلاه:

وكذلك:

$$Y_t \rightarrow \frac{V_0}{1-\beta} \text{ عندما } t \rightarrow \infty$$

وهي القيمة التي تؤدي إلى التوازن.

نموذج ساملسن في تفاعل المضاعف والمعجل

7-6

Samuelson's Multiplier Accelerator Interaction Model

يعرف هذا النموذج بنموذج التفاعل والذي يوضح عملية تحديد الدخل الوطني عندما يتفاعل

مبدأ المعجل مع المضاعف، ويشير النموذج إلى فرضيات عدة هي:

أن الدخل الوطني (Y) يتكون من ثلاثة مفردات أساسية هي الإنفاق النفقات الاستهلاكي C_t ،

والإنفاق الاستثماري I_t ، والإنفاق الحكومي G_t .

كما يفترض النموذج كون الاستهلاك دالة للدخل في الفترة السابقة أي أن C_t هو نسبة من Y_{t-1}

أما بالنسبة للاستثمار I_t فهو الاستثمار (غير التلقائي) والناجم عن كونه دالة للنزعة السائدة للإنفاق

الاستهلاكي والتي يتضمنها مبدأ المعجل وتدخل في النموذج. وبعبارة أخرى يفترض النموذج أن الاستثمار

هو نسبة ثابتة من الزيادة في الاستهلاك بين الفترة الحالية والفترة السابقة. أما المفردة الثالثة فهي الإنفاق

الحكومي (G_t) والذي يؤخذ على أساس كونه متغير خارجي أي أنه ثابت من فترة لأخرى ويرمز له

بالرمز (G_0) وتقدر قيمته: $G_0 = 1$

إن الافتراضات أعلاه يمكن وضعها في صيغة المعادلات الآتية:

$$Y_t = C_t + I_t + G_0 \quad (1)$$

$$C_t = \alpha Y_{t-1} \quad (2)$$

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) \quad (3)$$

$$Y_0 = Y_0$$

$$Y_1 = Y_1$$

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

والآن دعنا نستخرج الحل العام للنموذج:

نعوض المعادلتين الثانية (2) والثالثة (3) في المعادلة الأولى (1) لنحصل على معادلة متجانسة

لكون G_0 ثابت:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta(\alpha Y_{t-1} - \alpha Y_{t-2}) + G_0$$

$$Y_t - \alpha Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-1} + \alpha\beta Y_{t-2} - G_0 = 0$$

$$\therefore y_t - \alpha(1 + \beta)y_{t-1} + \alpha\beta y_{t-2} - G_0 = 0 \quad (4)$$

ويعتمد الحل العام لمعادلة الفروق المتجانسة (4) على طبيعة جذور المعادلة المساعدة ودعنا

نتذكر الفقرة (5-8) من الفصل العاشر التي تبين الحالات الثلاثة المذكورة:

أولاً:

إذا كانت M_1, M_2 حقيقية وغير متساوية أي $M_1 \neq M_2$ يكون حل المعادلة كما في (5- الفصل

19) هو:

السادس

$$Y_t = C_1 M_1' + C_2 M_2' \quad (5)$$

لاحظ أن C_1, C_2 هنا ثوابت المعادلة المساعدة ولبس الاستهلاك وفي الحالة الأولى أعلاه

تكون كل من M_1, M_2 كما يلي (انظر المعادلة 4)

$$M_1 = \frac{-A + \sqrt{A_1^2 + 4A_2}}{2}$$

$$M_2 = \frac{\alpha(1 + \beta) + \sqrt{\alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2}$$

أما:

$$M_2 = \frac{\alpha(1+\beta) - \sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2}$$

ثانياً:

إذا كانت M_1 ، M_2 حقيقية ومتساوية $M_1 = M_2 = M$ يكون الحل:

$$Y_t = C_1 M' + C_2 t M' \quad (6)$$

حيث أن قيمة M هنا تساوي:

$$M = \frac{\alpha(1-\beta)}{2}$$

وهذا لا يتحقق إلا عندما يكون:

$$\frac{\sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2} = 0$$

في كل من المعادلتين M_1 ، M_2 أعلاه انظر المثال (2) الوارد في الفقرة (5-8) لمزيد من

التفاصيل.

ثالثاً:

إذا كانت كل من M_1 ، M_2 مركبة فيكون الحل:

$$Y_t = r' (C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t)$$

حيث أن:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{\alpha\beta}$$

لكون:

$$a = \alpha(1+\beta) \text{ و } b = \sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

أما قيمة $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ فهي:

$$\sin \theta = \frac{a}{r} = \frac{\alpha(1-\beta)}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \left[1 - \frac{\alpha(1+\beta)}{4\beta}\right]^{1/2}$$

والآن ننتقل إلى حل المعادلة غير المتجانسة (4) وكما مبين:

حيث أن:

$$L = \frac{K}{1 + A_1 + A_2} \quad \text{راجع الصيغة (5-24)}$$

$$A_1 = \alpha(1-\beta) \quad \text{و} \quad A_2 = \alpha\beta \quad \text{و} \quad K = G_0$$

$$\therefore L = \frac{G_0}{1 - \alpha(1-\beta) + \alpha\beta}$$

$$= \frac{G_0}{1-\alpha}$$

الفصل

السادس

وبذلك يكون حل المعادلة غير المتجانسة بالصيغ الثلاث المذكورة أعلاه هو:

أولاً:

$$Y_t = C_1 M_1' + C_2 M_2' = \frac{G_0}{1-\alpha}$$

ثانياً:

$$Y_t = C_1 M_1' + C_2 t M_2' + \frac{G_0}{1-\alpha}$$

ثالثاً:

$$Y_t = r^t (C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) + \frac{G_0}{1-\alpha}$$

ونشير إلى أن قيم كل من: M_1 , M_2 , r قد مر استخراجها في أعلاه أما الثوابت فيمكن

تحديدتها عن طريق الشروط الأولية Y_0 , Y_1 .

والآن أين الحل الذي يحقق التوازن:

إن حل التوازن هو:

$$y^* = \frac{G_0}{1-\alpha}$$

وعند ملاحظة الحلول أعلاه نجد أن هذا الحل لا يحصل إلا عندما تتجه قيمة الحدين الأولين في

الحلول الثلاثة أعلاه إلى الصفر. كما تجدر الإشارة إلى أنه يمكن الاستعاضة بـ $(\frac{G_0}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha})$ في

الحلول أعلاه لأننا افترضنا منذ البداية أن $G_0 = 1$

تمارين (6-1)

1- النموذج الآتي يتعلق بنمو الدخل الوطني. جد الحل العام له:

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$C_t = \alpha + \beta Y_t$$

$$Y_{t+1} - Y_t = \gamma \alpha I_t$$

$$Y_0 = Y_0, \quad C_0 = C_0, \quad I_0 = I_0$$

$$\alpha \geq 0, \quad 0 < \beta < 1, \quad \gamma > 0$$

حيث أن Y يمثل الدخل الوطني و C الاستهلاك و I الاستثمار.

2- النموذج التالي لهارود في الدخل الوطني حل النموذج وبين المسار الزمني له.

$$S_t = \alpha y_t + \beta$$

$$I_t = e(y_t - y_{t-1})$$

$$S = mI_t$$

$$Y_0 = Y_0$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, e > 0, m > 0$$

حيث أن S يمثل الادخار و Y الدخل الوطني و I الاستثمار.

3- حل النموذج الآتي وبين سلوكية الحل:

$$C_t = \alpha Y_{t-1} + \beta$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$I_t = \gamma Y_t$$

$$0 < \alpha < 1, 0 < \gamma < 1, \beta > 0$$

وإن C يمثل الاستهلاك و Y الدخل الوطني و I تمثل الاستثمار.

4- خذ نموذج ساملسن:

الفصل

السادس

$$Y_t = C_t + I_t + G_0$$

$$C_t = \beta Y_{t-1}$$

$$I_t = \alpha(C_t - C_{t-1})$$

$$Y_0 = Y_0, Y_1 = Y_1$$

$$\beta > 0, \alpha > 0$$

حل النموذج أعلاه إذا كانت:

$$\beta = 0.9$$

$$\alpha = 0.4$$

ثم بين سلوكية المسار الزمني للحل.

الفصل السابع

البرمجة غير الخطية

Nonlinear Programming

البرمجة غير الخطية

Nonlinear Programming

المقدمة

1-7

ذكرنا في الفصل الأول من الجزء الأول من الكتاب أن كثير من العلاقات الاقتصادية تأخذ صيغة خطية مثل $q = 80 - 2p$ والتي تشير إلى أن الكميات المطلوبة هي دالة عكسية خطية للسعر. ولكن هناك علاقات تأخذ صيغة غير خطية مثل $q = 5 - 2p^{2/5}$. وقد أوضحنا بأن دوالاً من هذا النوع قد تكون خطية حرة لا قيود عليها كقيود الميزانية والدخل وغيرها. أو قد تكون مقيدة بشروط معينة وتسمى بالدوال غير الخطية أو البرامج الغير خطية (Non linear Programming) وتسمى اختصاراً (NLP) قد شرحنا بعضاً منها في الفصل الخامس من هذا الجزء و التي كانت من النوع البسيط غير المعقد. وقد وضعت عدة طرق لحل هذه البرامج ومنها ما يستند على طرق حل البرامج الخطية الذي سبق وأن شرحت مفصلاً في الجزء الأول. وسنتطرق بإيجاز إلى طرق حل البرامج غير الخطية بالقدر الذي يسمح به مستوى الفصل هذا الكتاب.

السابع

أنواع البرمجة غير الخطية The Kinds of NLP

2-7

تقسم البرامج غير الخطية إلى:

أ- البرامج غير المقيدة Unconstrained NLP

تشير البرامج غير المقيدة إلى إنها البرامج التي تتبدل فيها المتغيرات في دالة الهدف دون أي شروط أو محددات فالدالة:

$$Z = 2x_1^2 + x_2 + x_3^4$$

هي برنامج فيه دالة هدف فقط: $z = f(x)$ دون أن تكون هناك أية محددات على للمتغيرات

$$(x_1, x_2, x_3)$$

ب- البرامج المقيدة Constrained of NLP

أما البرامج المقيدة فهي التي تتضمن محددات على التبدلات التي تحدث في المتغيرات الواردة فيها
كان نقول بالنسبة للدالة أعلاه إنها برنامج تعظيم (z):

$$Z = 2x_1^2 + x_2 + x_3^4$$

وإن تعظيم (z) يصطدم بمحددات الموارد مثلاً فنقول أن:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_3 \leq 8$$

بالإضافة إلى شروط عدم السلبية التي تفترضها التحليلات الاقتصادية حيث لا معنى لهذه القيم إذا
كانت سالبة فتضاف المحددات الآتية:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ج- البرامج التربيعي Quadratic Programming

وهي البرامج التي تكون فيها دالة الهدف من الدرجة الثانية ومثقلة بمحددات متباينة خطية مثل:

$$z = x_1^2 + 2x_2 + x_3^2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 8$$

3-7 حل البرامج غير الخطية Solution of NLP

يحل البرنامج غير الخطي وذلك بإيجاد قيم المتغيرات التي ترد في البرنامج والتي تؤدي إلى تعظيم
أو تقليل دالة الهدف وحيث أن البرامج غير الخطية على أنواع كما ذكرنا سلفاً فقد تعددت طرق حل هذه
البرامج وسنحاول استعراض هذه الطرق باختصار وبالقدر الذي يسمح به مستوى الكتاب كما نوهنا سلفاً.

12-4 حل البرامج غير الخطية غير المقيدة Solution of UNLP

يحل البرنامج غير الخطي وغير المقيد (UNLP) بطرق عدة منها:

7-4-1 حل البرامج غير المقيدة ذات المتغيرين

ويمكن أن نتناول من طرق حلها طريقتين هما:

طريقة نيوتن رافسن (NRM) - (Raphson Method) - Newton

تحتاج هذه الطريقة لاستخراج المشتقة الأولى والثانية للدالة $f(x)$ أي استخراج $f'(x)$, $f''(x)$. وكما قد تطرقنا إلى طرق استخراج النهاية الصغرى أو العظمى للدالة عن طريق استخراج هاتين المشتقتين (راجع الفقرة 5-4 من الكتاب) ولكن بدلاً من جعل $f'(x) = 0$ حيث تكون كذلك عند نهاياتها المتطرفة ومن ثم الاستعانة بـ $f''(x)$ لمعرفة فيما إذا كانت نهاية عظمى أو صغرى فإن طريقة (NRM) تعتمد هنا الأسلوب الرقمي وعلى المشتقتين لاستخراج هذه النهاية. وتلخص هذه الطريقة بالخطوات الآتية:

الفصل

السابع

1- نبدأ الحل بتقدير حسن لقيمة x_0 , أي نحاول أن نقدر قيمة جيدة للمتغير x الذي يجعل الدالة في حالتها المثلى (أعظم أو أقل) وهذه القيمة رمزنا لها بـ x^* ولكن سنبدأ بها الحل أي نطلق منها باسم x_0 . وكلما كان تقديرنا جيداً سنبليح الحل الأمثل بسرعة.

2- تتبع القاعدة الآتية في البحث عن قيمة x^* الحقيقية وليست المقدرة:

$$(7-1) \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$f''(x_i) \neq 0$$

3- نتوقف عندما نصل إلى القيمة التي تفي بمتطلبات الحل وهي بلوغ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة $f(x)$ قد يكون الأمر غامضاً لهذا دعنا نأخذ مثلاً إيضاحياً.

مثال (1):

حل المسألة الآتية:

$$\min Z = 3x^2 + x + 5$$

الجواب:

نجد أولاً:

$$f'(x) = 6x + 1$$

$$f''(x) = 6$$

و

والآن نأخذ قاعدة البحث عن قيمة x^* وهي:

$$X_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}, i = 0, 1, 2, \dots$$

نبدأ بـ $i = 0$ ونقدر قيمة معينة لـ x_0 قريبه من x^* ولتكن $x_0 = 2$ فنحصل على:

$$x_1 = 2 - \frac{6(2) + 1}{6} = 2 - \frac{13}{6} = -\frac{1}{6} \text{ المحاولة الأولى:}$$

$$x_2 = -\frac{1}{6} - \frac{6(-\frac{1}{6}) + 1}{6} = -\frac{1}{6} + 0 = -\frac{1}{6} \text{ المحاولة الثانية:}$$

إذن نتوقف حيث لا تحسن في المحاولة الثانية وبذلك نكون قد بلغنا الحل الأمثل في الجولة الأولى

حيث تكون قيمة $x = -\frac{1}{6}$ وتكون قيمة (z) كالآتي:

$$Z = 3(-\frac{1}{6})^2 - \frac{1}{6} + 5$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + 5$$

$$= \frac{59}{12}$$

مثال (2):

حل المسألة الآتية:

$$\max f(x) = 8x - x^2$$

الجواب:

نجد أولاً:

$$f'(x) = 8 - 2x \quad , \quad f''(x) = 2$$

نبدأ بـ $x_0 = 2$ فنحصل على:

$$x_1 = 2 + \frac{8 - 2(2)}{2} = 2 + 2 = 4$$

$$x_2 = 4 + \frac{8 - 2(4)}{2} = 4 - 0 = 4$$

إذن الحل الأمثل هو عندما $x=4$

مثال (3):

حل المسألة الآتية:

$$\min f(x) = Z = x^3 - 6x + 7$$

الجواب:

نستخرج أولاً:

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \quad , \quad f''(x) = 6x$$

ونختار $x_0 = 1$ لنبدأ بها فنحصل على:

$$x_1 = 1 - \frac{3(1)^2 - 6}{6(1)} = 1 - \frac{-3}{6} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6}{6\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{27}{4} - \frac{24}{4}}{9} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

الفصل

السابع

$$x_2 = \frac{17}{12} - \frac{3\left(\frac{17}{12}\right)^2 - 6}{6\left(\frac{17}{12}\right)} = \frac{17}{12} - \frac{1}{408} = \frac{577}{408} = 1.414$$

وقد نكتفي في الخطوة الثالثة لأن هناك تحسن ضئيل وإذا ما واصلنا الحل فسنحصل على تحسن ضئيل جداً مع تعقد العمليات الحسابية ولهذا فإن:

$$X = \frac{577}{408} \text{ الحل الأمثل هو عندما}$$

$$Z = 2.83 - 8.48 = 1.35$$

طريقة ريكولا فالسي (The Regula Falsi Method RFM)

وهي طريقة مشابهة لطريقة (NRM) ولكنها لا تتطلب استخدام المشتقة الثانية أو ضرورة وجودها، وتتضمن الخطوات الآتية:

نبدأ باختيار حسن لكل من (x^*, x_0) , x_1 ويفضل ألا تكون قيمة x^* في الوسط.

نستخدم القاعدة الآتية للبحث عن قيمة (x) التي تعطي الحل الأمثل:

$$(7-2) \quad X_{i+1} = X_i - \frac{f'(x_i)}{\frac{f'(x_i) - f'(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}, i \geq 1$$

نتوقف عندما نرى بأن الحل صار مقنعاً، لناخذ بعض الأمثلة:

مثال:

خذ المثال رقم (3) في الفقرة السابقة وهو

$$\min z = x^3 - 6x + 7$$

واستخراج قيمة x التي تقلل الدالة.

الجواب

نستخرج في البداية:

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

ونختار قيمة ابتدائية لكل من x_0, x_1 ولنكن:

$$x_0 = 1, x_1 = 2$$

الآن نطبق القاعدة مع ملاحظة أننا سنشرع بالحل ابتداءً من $i=1$:

$$x_2 = 2 - \frac{3(2)^2 - 6}{\frac{3(2)^2 - 6}{2-1} - \frac{3(1)^2 - 6}{2-1}}$$

$$= 2 - \frac{6}{6+3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

الفصل

السابع

$$x_3 = \frac{4}{3} - \frac{3\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 6}{\frac{3\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 6}{\frac{4}{3}-2} - \frac{3(2)^2 - 6}{\frac{4}{3}-2}} = \frac{4}{3} - \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}-6} = \frac{4}{3} - \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{16}{3}}$$

$$= \frac{4}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{3} + \frac{1}{12} = \frac{16+1}{12} = \frac{17}{12}$$

والآن نواصل الحل:

$$x_4 = \frac{17}{12} - \frac{3\left(\frac{17}{12}\right)^2 - 6}{\frac{3\left(\frac{17}{12}\right)^2 - 6}{\frac{17}{12}-\frac{4}{3}} - \frac{3\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 6}{\frac{17}{12}-\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{17}{12} - \frac{\frac{1}{48}}{\frac{1}{48} - \left(-\frac{2}{3} \right)} = \frac{17}{12} - \frac{1}{11}$$

$$= \frac{17}{12} - \frac{1}{528} = \frac{748-1}{528} = \frac{747}{528} = 1.416$$

ومن ملاحظ ما توصلنا إليه في المرحلة الرابعة وهو (x=1.416) يبدو مقارباً لما توصلنا إليه بموجب طريقة (NRM) حيث كانت قيمة (x=1.414) وقد نكتفي بهذا القدر ولكن إذا واصلنا الحل فسنقترب من القيمة (1.414).

7-4-2 حل البرامج غير المقيدة ذات الأكثر من متغيرين

تناولنا البرامج غير المقيدة ذات المتغيرين أما البرامج التي تزيد متغيراتها عن ذلك فهناك عدة طرق لحلها وهي كثيرة نذكر منها طريقة الانحدار الشديد وطريقة نيوتن رافسن (The Newton Raphson Method) وهي امتداد للطريقة التي ذكرناها في الدالة غير المقيدة ذات المتغيرين وطريقة فلجر - بويل (Fletcher - Powell) طريقة شارك فيها فلجر مع ريفز (Powell - Fletcher) التي تقوم على أساس الميل المتراقق وطريقة بويل (Powell) التي لا تتضمن أية مشتقات وطريقة مصفوفة المشتقات التي سنكتفي بتناولها من بين الطرق المذكورة أعلاه.

طريقة مصفوفة المشتقات:

وتتميز هذه الطريقة في اعتمادها على المشتقات التي تطرقنا إليها في الفصل الخامس وذلك بوضع هذه المشتقات على شكل مصفوفة فإذا أخذنا دالة لـ n من المتغيرات مثل:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

عند النقطة $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ بحيث تكون لدينا (n) من المشتقات الجزئية والتي

تساوي صفراً وكما يأتي:

$$(7-3) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x^*} = 0, \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x^*} = 0, \dots, \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{x^*} = 0$$

وبالإمكان وضع ذلك بصيغة محدد (Δ_n) للمشتقات الجزئية الثانية وكما يأتي:

$$(7-4) \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

الفصل

السابع

ويسمى هذا المحدد بالمحدد الهيسي (Hessian determinant)

أما المحيديدات الرئيسية (Principal minors)

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

9

$$(7-5) \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

وتكون قيمة x^* التي نبحث عنها والتي تسمى بنقطة الاستقرار (stationary point) وبصيغة:

$$(7-6) \quad x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

إما:

نقطة عظمى موقعية (local max) إذا كانت:

$$(7-7) \quad \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$$

نقطة صغرى موقعية (local min)

$$(7-8) \quad \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots$$

وإذا لم يتحقق واحد من هذه الشروط فلا بد للدالة أن تفحص في منطقة نقطة الاستقرار.

ولابد من الإشارة هنا إلى أن الشروط التي تكلمنا عنها في الفقرة (5-4) من هذا الجزء من الكتاب

المتعلقة بالدالة ذات المتغيرين ما هي إلا حالة خاصة من الشروط أعلاه ذات المتغيرات العديدة أي الأكثر من متغيرين.

لنتناول مثلاً إيضاحياً:

مثال:

حدد النهاية الصغرى أو العظمى أن وجدت في الدالة الآتية:

$$Z = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_2 - 8x_1 - 2x_3 + 6$$

الجواب

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + 2x_3 - 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 + 2x_1 - 2$$

وإذا كانت: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ فإن:

$$2x_1 + 2x_3 - 2 = 0$$

$$4x_1 + 2x_3 - 8 = 0$$

$$-2x_1 + 6 = 0$$

$$\therefore x_1 = 3$$

$$2x_3 + 2(3) - 2 = 0$$

و

$$x_3 = -2$$

$$x_2 = 2$$

أما الآن فسنخرج المشتقات الجزئية الثانية وكما يلي:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2$$

الفصل
السابع

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3} = 0$$

إذن:

$$\Delta_1 = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(4 - 0) - 0(0 - 0) + 2(0 - 4) \\ = 16 - 8 = 8 > 0$$

وحيث أن:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$$

لهذا فإن النقطة:

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$$

وهي نقطة نهاية صغرى موقعية للدالة (z) وتساوي:

$$\begin{aligned} Z &= 2(3)^2 + (2)^2 + (-2)^2 + 2(3)(-2) - 4(2) - 8(3) - 2(-2) + 6 \\ &= 36 - 44 \\ &= -8 \end{aligned}$$

حل البرامج غير الخطية المقيدة

5-7

Solution of Constrained (NLP)

7-5-1 حل البرامج غير الخطية المقيدة ذات المتغيرين

سبق وان تناولنا حل مثل هذه البرامج التي تحتوي على دالة هدف ذات متغيرين مثقلة بقيد وكل منها ذا متغيرين وقد استخدمت طريقة مضاعف لاكرانج ((Lagrange Multiplier لهذا الغرض راجع الفقرة (8-14-4) من هذا الجزء من الكتاب.

7-5-2 حل البرامج غير الخطية المقيدة ذات الأكثر من متغيرين

هناك طرق عدة لحل (CNLP) التي تحتوي على (n) من المتغيرات نستعرض منها طريقة مضاعفات لاكرينج لأنها أصبحت مألوفة لدينا في معالجة حل مثل هذه البرامج: إذا أخذنا الدالة الآتية ذات (n) من المتغيرات:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

والمثقلة بالقيد:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

والتي تكون فيها النقطة:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

مستوفية لمتطلبات (n+1) من المعادلات وإذا ما تذكرنا مضاعفات لاكرانج فإن الحل يبدأ بكون

حسب الصيغات الآتية:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0$$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \text{ و } \lambda = \frac{f_{xi}}{g_{xi}}, i = 1, 2, \dots, n$$

أما الخطوة الثانية فهي وضع المحدد والتالي:

الفصل

السابع

$$\begin{vmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \dots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & f_{x_1x_1} - \lambda g_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} - \lambda g_{x_1x_2} & \dots & f_{x_1x_n} - \lambda g_{x_1x_n} \\ g_{x_2} & f_{x_2x_1} - \lambda g_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} - \lambda g_{x_2x_2} & \dots & f_{x_2x_n} - \lambda g_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n} & f_{x_nx_1} - \lambda g_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} - \lambda g_{x_nx_2} & \dots & f_{x_nx_n} - \lambda g_{x_nx_n} \end{vmatrix}$$

ويسمى هذا المحدد بالمحدد الهيسي المؤطر (Abordered Hession determinant) لكونه مؤطراً من

جبهتين بالمشتقات الجزئية لدالة القيد $f(g)$. ولأجل تحديد فيما إذا كانت النقطة

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ نقطة عظمى أم صغرى فلا بد من تقييم المحددات الرئيسية والتي يبلغ عددها

(n-1) وهي:

$$\Delta_{n+1} : \Delta_3 \Delta_4 \dots \Delta_{n+1}$$

عند: $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ومن الملاحظ أن Δ_i يحتوي على الخط i والعمود i من Δ_{n+1}

وتكون النقطة $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$

نقطة عظمى إذا كان:

$$(7-10) \quad \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 > 0 \dots$$

نقطة صغرى إذا كان:

$$(7-11) \quad \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 < 0 \dots$$

وإذا لم يتحقق واحد من هذه الشروط فيتعين فحص الدالة في نقطة الاستقرار (stationary point)

ومما تجدر الإشارة إليه أن النهاية العظمى والصغرى للدالة المقيدة ذات المتغيرين ما هي إلا حالة خاصة مما تناولناه أعلاه بمتغيرات عديدة.

والآن نحتاج لمثال إيضاحي:

$$\max Z = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_3$$

subject to

$$= x_1 + x_2 + x_3 = 23$$

الجواب

نصيغ مضاعف لاكرانج:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_3$$

والآن نستخرج المشتقات الجزئية وكما يأتي:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -6x_2 + x_1 - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = -4x_3 + 1 - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 45$$

وإذا كانت:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

إذن لدينا:

$$2x_1 + x_2 - \lambda = 0$$

$$x_1 - 6x_2 - \lambda = 0$$

$$-4x_3 + 1 - \lambda = 0$$

ومن المعادلة هذه المعادلات نحصل على:

$$\therefore 2x_1 - x_2 = x_1 - 6x_2 = 4x_3 + 1$$

ومنها نستخرج:

$$2x_1 - x_1 + x_2 - 6x_2 = 0$$

$$\therefore x_1 - 5x_2 = 0 \quad \therefore x_1 = 5x_2$$

$$2(5x_2) + x_2 = -4x_3 + 1$$

$$11x_2 = -4x_3 + 1$$

$$4x_3 = 1 - 11x_2 \quad \therefore x_3 = \frac{1 - 11x_2}{4}$$

إذن نستعين الآن بمعادلة القيد ونعوض فنحصل على:

$$5x_2 + x_2 + \frac{1 - 11x_2}{4} = 23$$

$$20x_2 + 4x_2 + 1 - 11x_2 = 92$$

$$13x_2 = 91$$

الفصل

السابع

$$\therefore x_2 = \frac{91}{13} = 7$$

$$x_1 = 5(7) = 35$$

$$x_3 = \frac{1-11(7)}{4} = -19$$

$$\lambda = 2(35) + 7 = 77$$

والآن: نأخذ المشتقات الجزئية الثانية

$$f_{x_1x_1} = 2 \quad f_{x_1x_2} = 6 \quad f_{x_1x_3} = -4$$

$$f_{x_2x_2} = 1 \quad f_{x_2x_3} = 0 \quad f_{x_3x_3} = 0$$

$$g_{x_1} = 1 \quad g_{x_2} = 1 \quad g_{x_3} = 1$$

$$g_{x_1x_1} = 0 \quad g_{x_1x_2} = 0 \quad g_{x_1x_3} = 0$$

$$g_{x_2x_2} = 0 \quad g_{x_2x_3} = 0 \quad g_{x_3x_3} = 0$$

وبذلك يصبح بمقدورنا تكوين المحددات الرئيسية وهي:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & f_{x_1x_1} - \lambda g_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} - \lambda g_{x_1x_2} \\ g_{x_2} & f_{x_2x_1} - \lambda g_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} - \lambda g_{x_2x_2} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0(12-1) - 1(6-1) + 1(1-2) = -6$$

ونفس الطريقة والاستناد إلى محدد هيسن نستنتج:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 0 - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 - [-24 + 4 + 0] + [-4 + 8 + 0] - [0 + 12 - 1] \\ \therefore \Delta_2 &= 0 - 20 + 4 - 11 = -27\end{aligned}$$

ومن النتائج يتبين أن:

$$\Delta_3 < 0, \quad \Delta_4 < 0$$

وبذلك نستنتج أن النقطة (35, 7, -19) هي نقطة صغرى موضعية للدالة (z) والمقيدة بالقيود:

السابع $x_1 + x_2 + x_3 = 23$

البرامج التربيعية Quadratic Programming

7-6

يدعى البرنامج التربيعي إذا كانت دالة الهدف فيه تحتوي على حدود خطية إضافة إلى طاقم من

القيود الخطية كما مبين في الصيغة الآتية:

$$(7-12) \quad \max \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} x_j x_k$$

Subject to =

$$(7-13) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + s_i = b_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{all } x_j \geq 0 \text{ and all } s_i \geq 0$$

أما طريقة حل هذا البرنامج فهي كما يلي:

لا بد قبل الشروع باستعراض طريقة الحل من الإشارة إلى بعض الملاحظات المهمة بشأن دالة

الهدف وقد يكون من المفيد تناول مثال نتعقب من خلاله خطوات الحل والملاحظات المذكورة:

لنفترض بأن لدينا البرنامج الآتي:

$$z = 2x_1 + 5x_2 - \frac{1}{4}x_1^2 + 1x_1x_2 - 3x_1x_3 - 4x_2^2$$

من الملاحظ:

أ- إن بعض المتغيرات مثل x_1 , x_2 مرفوعة لقوة تربيعية.

ب- هناك بعض المتغيرات تجمعت على شكل أزواج كل زوج من حد من حدود الدالة، مثل x_1x_2

و x_1x_3 .

ج- من الممكن إعادة صياغة دالة الهدف على شكل قالب يأخذ الهيئة الآتية ويحتوي على:

$$(7-14) \quad z = (0 + 1x_1 + \frac{5}{2}x_2 + 0x_3)$$

$$+ (1 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3)x_1$$

$$+ (\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_1 - 4x_2 + 0x_3)x_2$$

$$+ (0 - \frac{3}{2}x_1 - 0x_2 + 0x_3)x_3$$

وبلاحظ أيضاً على دالة الهدف بالصيغة (7-14) ما يلي:

أ- إن العناصر القطرية (diagonal terms) ما هي إلا معاملات المتغيرات التربيعية في دالة الهدف

$$(7-13) \text{ وهي } (0, -4, -\frac{1}{4}).$$

ب- عناصر الأقطار الجانبية تساوي $\frac{1}{2}$ قيمة معاملات المتغيرات المقابلة في (7-13)

ج- إن الصف i متماثل مع العمود j فالعمود (1) يتكون من العناصر الآتية

$$(0 , 1 , \frac{5}{2} , 0) \text{ وهي نفسها عناصر الصف } (1). \text{ وهكذا.}$$

والآن دعنا نلاحظ المشتقات الجزئية للدالة (z) كما في الصيغة (7-13) والتي تظهر كما يلي:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2 - \frac{1}{2}x_1 - 1x_2 = 2(1 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 5 + 1x_1 - 8x_2 = 2(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_1 - 4x_2)$$

$$(7-15) \quad \frac{\partial z}{\partial x_3} = -3x_1 = 2(-\frac{3}{2}x_1)$$

الفصل

السابع

وعند التمعن في قيم المشتقات الجزئية للدالة (z) في (7-15) يلاحظ:

أ- إنها نفس قيم الدالة (z) (7-14) الموجودة داخل الأقواس مضروبة بـ (x_j) مضروبة في (2).

ب- إن القيم الموجبة للمشتقات تشير إلى إمكانية زيادة قيمة الدالة بزيادة قيمة المتغير المرافق.

ج- إن المشتقات الجزئية هي دوال خطية لـ (x_j) وهذا ما يساعدنا على الانتقال بالحل إلى

الطريقة المبسطة (simplex) كما سنتابع ذلك بعد قليل.

لازلنا في مرحلة تثبيت الملاحظات والتهيئة لشرح طريقة الحل ومن هذه التهيئة نقوم بما يلي:

إن طريقة الحل تحتاج إلى إدخال متغيرات إلى المقادير بين الأقواس في (7-14) ونسميها المتغيرات

الحرّة (free variables) ولتوضيح ذلك دعنا ندخل متغير حراً مثل u إلى المقدار المضروب بـ x_1 في (7-14)

(ويوضح أسلوب وهيكّل هذا المتغير العلاقة المفاهيمية لهذا المتغير بالمقدار وكما يأتي:

$$(7-16) \quad \frac{1}{4}u = 1 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3$$

لاحظ أن اختيار معامل u كان بطريقة تسهل عملية التخلص من الكسور في المعادلة الجديدة (

12-16) ولهذا نستطيع صياغتها كالآتي:

$$u = 4 - x_1 + 2x_2 - 6x_3$$

أو بعد إعادة الترتيب:

$$(7-17) \quad x_1 = 4 - u + 2x_2 - 6x_3$$

نحذف المتغيرات x_1 واحداً بعد الآخر من المقادير التربيعية ونعوض بدلها بمقادير خطية تحتوي

على متغيرات أخرى. وفي مثالنا نقوم بحذف x_1 في (7-14) ونضع بدله الطرف الأيمن من (7-17) ويبدو ذلك كالآتي:

$$\begin{aligned} z = & [0 + (4 - u + 2x_2 - 6x_3) + \frac{5}{2}x_2 + 0x_3] \\ & + \left[1 - \frac{1}{4}(4 - u + 2x_2 - 6x_3) + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \right] x_1 \\ & + \left[\frac{5}{2} + \frac{1}{2}(4 - u + 2x_2 - 6x_3) - 4x_2 + 0x_3 \right] x_2 \\ & + \left[0 - \frac{3}{2}(4 - u + 2x_2 - 6x_3) + 0x_2 + 0x_3 \right] x_3 \end{aligned}$$

وبإعادة الصياغة ينتج:

$$(7-18) \quad z = (4 - u + \frac{9}{2}x_2 - 6x_3)$$

$$\begin{aligned}
 & + (0 - \frac{1}{4}u + 0x_2 - x_3)x_1 \\
 & + (\frac{9}{2} - \frac{1}{2}u - 3x_2 - 3x_3)x_2 \\
 & + (-6 + \frac{3}{2}u + 3x_2 - 9x_3)x_3
 \end{aligned}$$

ج - نعوض المقدار في المعادلة (7-17) ل x_1 في المعادلة (7-18) ثم نقوم بتوسيع الناتج المستحصل حد بعد حد لكل عنصر من عناصر (7-17) وبعد ذلك تجمع مع الحدود الواقعة بين الأقواس في (7-18) . وعلى سبيل المثال يكون الحد الثالث في المقدار الموسع:

$$(0 + \frac{1}{4}u + 0x_2 + 0x_3)2x_2$$

وبعد جمعه مع الحد الثالث بين الأقواس وهو:

$$(\frac{9}{2} - 2u - 3x_2 - 3x_3)$$

الفصل

ينتج:

السابع

$$\left(\frac{9}{2} + 0u - 3x_2 - 3x_3 \right)$$

أما الناتج الكلي فهو:

$$(7-19) \quad z = (4 - 0u + \frac{9}{2}x_2 - 6x_3)l$$

$$(0 - \frac{1}{4}u + 0x_2 + 0x_3)u$$

$$(\frac{9}{2} + 0u - 3x_2 - 3x_3)x_2$$

$$(-6 + 0u - 3x_2 + 9x_3)x_3$$

وبلاحظ أن المتغير الوحيد الذي حصل في معاملات المصفوفة هو في معاملات u التي أصبحت

صفراً ماعدا المعامل الواقع في قطر المصفوفة وهو $(-\frac{1}{2}u)$ وهذا قد يجعلنا نستغني عن العمليات

الطويلة التي أجريناها في أعلاه ونكتفي بجعل معاملات (u) صفراً ماعدا العنصر الواقع في القطر.

كما يلاحظ أن المصفوفة الجديدة هي متناظرة أيضاً.

والآن ننتقل إلى طريقة الحل والتي تسمى طريقة السمبلكس لحل الدالة التربيعية:

تتلخص خطوات هذه الطريقة بالآتي:

الخطوة الأولى:

$$s_i = b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \text{ دع}$$

ونرمز s_i إلى المتغيرات الإضافية (slack variables). وبذلك يتكون لدينا أول حل ممكن (initial

feasible basic solution).

الخطوة الثانية:

نحدد اتجاهات الحل من خلال التحسن الذي نلاحظه في الحل الجاري ونتوقف عندما لا يوجد أي

تحسن وبخلاف ذلك نواصل البحث عن الحل الأمثل وننتقل إلى الخطوة الثالثة.

الخطوة الثالثة:

نجري حسابات الحل الجديد ونعود إلى الخطوة الثانية ويبدو أن العمل يتركز في الخطوة الثانية

فدعنا نشرحها بشكل مفصل:

أن هذه الخطوة تتطلب السير وفق النقاط الآتية:

نختار أي متغير حر (free variable) كي يدخل الحل وإذا كانت نتيجة المشتقة الجزئية المقابلة

لدالة الهدف ليست صفراً (non zero).

إذا كانت المشتقات الجزئية للمتغيرات الحرة تساوي صفراً فعندئذ نختار متغيراً سواء كان x_i أو s_i

لأجل إدخاله والذي تكون نتيجة مشتقته الجزئية في دالة الهدف هي الأكثر إيجابية (most positive).

ننهي دورات الحل عندما تكون المشتقات الجزئية صفراً للمتغيرات الحرة أو اصغر أو تساوي صفراً للمتغيرات غير الأساسية الأخرى.

ونلاحظ هنا أن معيار السمبلكس التربيعية الأول مشابه إلى معيار السمبلكس الخطي الأول الذي تناولناه في الفصل الخامس من الجزء الأول من الكتاب حيث يشير المعياران إلى اتجاه تحسن الحل عندما يتم إدخال متغير غير أساسي إلى عمليات البحث عن الحل الأمثل.

أما سعة الخطوة التي نخطيها باتجاه الحل الأمثل فيحكمها إلى حد كبير معيار السمبلكس الثاني أيضاً فهو يهديننا إلى أكبر قيمة للمتغير غير الأساسي الذي يبقى على الإمكانيات المتاحة الواردة في القيود. ولكن في نفس الوقت نكتشف قيمة هذا المتغير التي يؤدي إلى تناقص دالة الهدف. ولهذا فإن السعة المثلى لخطوة الحل هي اصغر هاتين القيمتين. قد تبدو هذه القاعدة غير واضحة إذن نحتاج لمواصلة شرح طريقة الحل حيث سيساعد ذلك على تبسيط ما قلناه ونحتاج هنا لنتناول مثال:

مثال:

$$(7-20) \quad \max z = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_1^2 - 2x_2^2 - \frac{1}{3}x_3^2$$

الفصل

بشرط أن:

السابع

$$(7-21) \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + 5 = 4$$

$$x_j \geq 0, s \geq 0$$

والآن نشرع في الحل:

نعيد كتابة دالة الهدف على غرار (7-14) لينتج:

$$(-3x_1 + 3x_1 + 2x_2 + 1x_3) - 1$$

$$(7-22) \quad + (3 - 3x_1) x_1$$

$$+ (2 - 2x_2) x_2$$

$$(1 - \frac{1}{3}x_3) x_3$$

وبلاحظ أن القيم الصفرية حذفت من هذه الصيغة لغرض التبسيط. كما نتذكر بأن القيم الموجودة داخل هذا القالب هي نصف القيم التي تحتويها المشتقات الجزئية للمتغيرات المقابلة (راجع (7-15)

والآن أي متغير سيدخل عمليات الحل ؟

نعود إلى الفقرة (ب) من الخطوة الثالثة ونقول بأن x_1 هو الذي سيدخل عمليات الحل. ولأجل إيجاد قيمة x_1 نطبق أولاً الأسلوب المتبع في معيار السمبلكس الثاني لغرض حساب القيمة العظمى لـ x_1 والتي تنسجم مع الإمكانات الفاعلة في القيد. أن هذا يتطلب استخراج النسب للقيم الجارية للجهة اليمنى من القيد إلى معاملات المتغير الداخل. وفي مثالنا يبدو ذلك كما يلي:

حيث لدينا قيد واحد أذن:

$$(7-23) \quad x_1 \leq \frac{4}{1} = 4$$

معامل x_1

وهذه تمثل سعة الخطوة التي تفي بمتطلبات الإمكانات الفاعلة للقيد. أن قيمة x_1 تعطي الحد الأعلى للتحسينات الممكنة حالياً في دالة الهدف مع بقاء كل المتغيرات غير الأساسية على مستوياتها الجارية لاحظ أن:

$$(7-24) \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 \quad \text{أو بشكل مرادف} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0$$

حيث أن المشتقة الجزئية تحسب لقيمة الحل التجريبي الجاري أن هذه المعادلة تعطي:

$$3 - 3x_1 = 0$$

ومنها نستخرج:

$$(7-25) \quad x_1 \leq \frac{3}{3} = 1$$

وهي سعة الخطوة التالية التي تؤدي إلى تحسين قيمة دالة الهدف.

وتعتبر المتباينة (7-25) أكثر تقييداً من المتباينة (7-23) حيث تشير إلى أن x_1 سيدخل عمليات الحل

بقيمة مقدارها (1) فقط وهذا ما يؤهلها للانتقال إلى الخطوة الثالثة. حيث يمكن بلوغ $x_1 = 1$ في الحل

التجريبي التالي بمجرد إضافة معادلة تعريفية للمتغير الحر مرافقة للمتغير x_1 كما مبين أدناه:

$$3u_1 = 3 - 3x_1$$

أو بشكل مرادف لـ

$$(7-26) \quad x_1 + u_1 = 1$$

وفي الحل الجاري يلاحظ أن: $u_1 = 1$ مادام $x_1 = 0$ ولكن عند استخدام المحورية (pivoting) فإن u_1 الفصل

يصبح غير أساسي ويهبط إلى مستوى الصفر وبذلك يرفع المتغير إلى القيمة (1) وبمعنى آخر: السابع

إذا راصفنا العلاقة (7-26) مع القيد في الحالة (7-26) ويكون المحور x_1 في المتباينة (7-26) نحصل

على القيود الآتية:

$$(7-27) \quad 2x_2 + x_3 + s - u_1 = 3$$

$$x_1 + u_1 = 1$$

نحذف x_1 في دالة الهدف (7-22) وذلك بتعويضها بالعلاقة في (7-26) فينتج:

$$(3 \quad + 2x_2 \quad + 1x_3 \quad) 1$$

$$(7-28) \quad + (\quad - 3u \quad) u_1$$

$$+ (2 \quad - 2x_2 \quad) x_2$$

$$+ (1 \quad \quad - \frac{1}{3}x_3) x_3$$

دعنا نتذكر بأنه لازال كل مقدار في داخل الأقواس يمثل $\frac{1}{2}$ قيمة المشتقة الجزئية للمتغيرات غير

الأساسية المقابلة. ولكن يتعين الأخذ بالحسبان أن تحريك أي متغير يؤثر على $x(x)$ من خلال التغيرات المرافقة في المتغيرات الأساسية. وتسمى هذه الحالة أحياناً بالمشتقة الجزئية المصغرة.

(انتهت الخطوة الأولى) وأعطينا:

القيمة التي مقدارها (3) في أعلى يسار العلاقة (7-28) والتي تساوي قيمة دالة الهدف في الحل التجريبي الجاري.

والآن نعود إلى الخطوة الثانية:

ونلاحظ بأن الحل يمكن تحسينه بإدخال x_2 . أما قيود الإمكانات وفقاً (7-27) فهي

$$x_2 \leq \frac{3}{2} = 1.5 \quad \text{ويمكن التحقق من أن القيمة التي نعطيها لـ } x_2 \text{ والتي تعطي أفضل تحسن في دالة}$$

الهدف هي:

$x_2 = 1$ أيضاً ولأجل إكمال الخطوة الثالثة ندخل متغيراً حراً آخر وكما يلي:

$$2u_2 = 2 - 2x_2$$

وهذا مرادف لـ $x_2 + u_2 = 1$ (12-29)

وبجمع (7-29) مع (7-27) للحصول على:

$$\text{الصف 1} \quad x_3 + 5 - u_1 - 2u_2 = 1$$

$$\text{الصف 2} \quad x_1 + u_1 = 1 \quad (7-30)$$

$$\text{الصف 3} \quad x_2 + u_2 = 1$$

وباستخدام (7-29) لأجل حذف x_2 من (7-28) نحصل على دالة الهدف المختصرة وكما مبين في

أدناه:

$$(5 + 1x_3)$$

$$(7-31) \quad + (-3u_1) u_1$$

$$+ (\quad - 2u_2 \quad) u_2 \\ + (\quad - \frac{1}{3}x_3) x_3$$

وباستخدام (7-29) لأجل حذف x_2 من (7-28) نحصل على دالة الهدف المختصرة وكما مبين في

أدناه:

$$(7-31) \quad (5 \quad)1 \\ + (\quad - 3u_1 \quad) u_1 \\ + (\quad - 2u_2 \quad) u_2 \\ + (\quad - \frac{1}{3}x_3) x_3$$

ويلاحظ في كلا (7-28) و (7-31) أن الحد الأول داخل الأقواس المرافق للمتغيرات الحرة u_1, u_2

يساوي صفر. وعلى هذا الأساس فإن المشتقة الجزئية لدالة الهدف الانتقالية في كل من (7-28) و (7-31)

ولكل متغير حر تساوي صفر في هذه الحلول التجريبية. والآن: يشير الفرع (ب) من المعيار الأول الوارد في الفصل

الخطوة الثانية إلى أن المتغير x_3 يدخل في عمليات الحل، ولأجل أنجاز حساب سعة الخطوة نجد أن

حسابات الإمكانات المستندة إلى (7-30) محددة. ولهذا في هذه الحالة نقوم بأجراء تغييرات في الخطوة

الثالثة وتشمل هذه التغييرات مواقع المتغيرات الموجودة في عمليات الحل وهي: أن x_3 سيدخل هذه

العمليات ويغادر «مادام» x_3 لا يظهر إلا في الصف (1) للعلاقة (7-30)، ولا تحتاج هنا لإجراء حسابات

المحور في القيود ولكن لو كان هناك أكثر من قيود هذه المسألة التي نحن يصدها لنشأت الحاجة لإجراء

حسابات المحور.

والآن سنقوم بحذف x_3 من (7-31) بواسطة الصف (1) في العلاقة (7-30) لتحصل على:

$$(7-32) \quad \left(6\frac{2}{3} + \frac{2}{3}u_1 + \frac{4}{3}u_2 - \frac{2}{3}s \right) 1$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{2}{3} - \frac{10}{3}u_1 - \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}s \right) u_1 \\
 & + \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}u_1 - \frac{10}{3}u_2 + \frac{2}{3}s \right) u_2 \\
 & + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{3}s \right) s
 \end{aligned}$$

ويبدو أن الحل التجريبي الجاري هو:

$$(7-33) \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

ومن ذلك نستنتج أن المتغيرات الثلاثة جميعها عند مستوى القيم الموجبة فهل هذا هو الحل الأمثل ؟ وللإجابة على هذا السؤال نقول بالنفي وفقاً لما يقرره الفرع (أ) من المعيار الأول. ولأجل توضيح ذلك نعود إلى العلاقة (7-26) = (7-29) المرافقة لكل من $u_1 = u_2$ والتي فرضت على المسألة كبدعة لأجل التأكد من سعة الخطوة المثلى التي نحتاجها في تطبيق المعيار الثاني. ولهذا لا يوجد أي سبب لتكون قيمة كل من (u_1, u_2) صفراً في حين هما غير مقيدتين في الإشارة ولهذا سميناها بالمتغيرات الحرة. وكنتيجة لذلك إذا كانت المشتقة الجزئية لدالة الهدف للمتغير الحر = ليست صفراً وعندها يمكن تحسين الحل من خلال التحرك بالمتغير موضوع البحث بالاتجاه المناسب مسترشدين بإشارة المشتقة الجزئية. وكما نلاحظ في (7-32) فإن المشتقات الجزئية لكل من u_1, u_2 هي ليست صفراً ولهذا نختار u_1 لأجل دخول عمليات الحل. والآن ما دامت المشتقة الجزئية لـ u_1 موجبة لهذا نزيد من قيمة u_1 ويكون طريق البحث عن مستوى جديد لـ u_1 هو نفس الطريق الذي سلكناه في الخطوات السابقة (أي دورات الحل السابقة) وإذا كانت قيمة المشتقة الجزئية سالبة فإن ذلك يستوجب اختيار القيود في (7-30) لأجل التحقق عن الكيفية التي جاءت بها القيمة السالبة دون خرق متطلبات القيود. أن هذا مرادف لاختبار مدى الكبر الذي تبلغه $(-u_1)$.

إن قيمة u_1 التي تعطي أعلى قيمة تحسينية في دالة الهدف (مع بقاء كل قيم المتغيرات غير الأساسية على مستوياتها الحالية) أن القيمة المطلوبة

ل u_1 هي $u_1 = \frac{2}{10}$ والتي هي ناتج ما يأتي:

عند الحل التجريبي الجاري:

$$(7-34) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u_1} = \left(\frac{2}{3} - \frac{10}{3} u_1 \right) = 0$$

$$\therefore 10u_1 = 2 \quad , u_1 = \frac{2}{10}$$

ولهذا ومن اجل التأكد من أن $u_1 = \frac{2}{10}$ سندخل عمليات الحل التجريبي التالية لهذا يجب

إدخال متغير حر جديد هو u_3 وكما يأتي:

$$(7-35) \quad \frac{10}{3} u_3 = \frac{2}{3} - \frac{10}{3} u_1 - \frac{2}{3} u_2 + \frac{1}{3} s$$

وهو مرادف:

الفصل

السابع

$$(7-36) \quad -\frac{1}{10} s + 1u_1 + \frac{1}{5} u_2 + 1u_3 = \frac{1}{5}$$

وباستخدام العلاقة (7-36) لأجل حذف u_1 من العلاقة (7-30) فينتج:

$$x_3 + \frac{9}{10} s - \frac{9}{5} u_2 + u_3 = \frac{6}{5} \quad \text{الصف 1}$$

$$(7-37) \quad x_1 + \frac{1}{10} s - \frac{1}{5} u_2 - u_3 = \frac{4}{5} \quad \text{الصف 2}$$

$$x_2 + u_2 = 1 \quad \text{الصف 3}$$

ويتم حذف u_1 من العلاقة (7-32) فينتج:

$$(7-38) \quad \left(6\frac{4}{5} + \frac{6}{5} u_2 - \frac{3}{5} s \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(-\frac{10}{3}u_3 \right) u_3 \\
 & + \left(\frac{6}{5} - \frac{16}{5}u_2 + \frac{3}{5}s \right) u_2 \\
 & + \left(-\frac{3}{5} + \frac{3}{5}u_2 - \frac{3}{10}s \right) s
 \end{aligned}$$

ومادام u_1 أصبح متغيراً أساسياً في (7-36) وهو غير مقيد من حيث الإشارة لهذا لا يمكن أن نخرجه كي يكون غير أساسي وعليه فإن (7-36) يمكن إسقاطها في الدورات اللاحقة لعمليات الحل وستكون قيود الحل هي (7-37).

وعلى العموم مادام المتغير الحر قد دخل عمليات الحل فإن العلاقة المضافة يمكن إسقاطها وهذا يعني أن عدد القيود لا يجوز أن تزيد عن $(m \times n)$ فلو افترضنا أن جميع s_r, x_r أصبحت متغيرات أساسية لذلك تصبح لدينا $(m \times n)$ من القيود ولهذا فإن أي متغير غير أساسي ينبغي أن يكون متغيراً حراً. بعد أن تم اختبار واحد من تلك المتغيرات لدخول عمليات الحل ليصبح متغيراً أساسياً فإن واحداً من حالتين ستظهر ولهما:

أما s_r أو x_r يجب أن يصبح غير أساسي وبهذا يجب إسقاط الصف الذي اختير فيه المتغير الحر ليكون أساسياً وفي هذه الحالة يختصر عدد القيود بقيد واحد.

أما الحالة الثانية فإن المتغير الحر المرافق للقيد التعريفي المفروض حديثاً بالعمليات الجارية يجب أن يصبح غير أساسي ولهذا يجب إسقاط هذه العلاقة بعد إجراء عملية المحور على المتغير الحر الذي يتم اختياره وفي هذه الحالة يكون عدد القيود ثابتاً.

والآن وبعد هذه الملاحظة الطويلة حول عدد القيود نعود إلى الخطوة الثانية من خطوات الحل

والتي تستوجب إدخال u_2 إلى عمليات الحل مادامت مشتقتها الجزئية في العلاقة (7-38) موجبة فنحصل على:

$$(7-39) \quad \frac{16}{5}u_4 = \frac{6}{5} - \frac{16}{5}u_2 + \frac{3}{5}s$$

وبعد حذف u_2 من (7-37) ينتج:

$$\text{الصف 1} \quad x_3 + \frac{9}{16}s + u_3 + \frac{9}{5}u_4 = \frac{15}{8}$$

$$\text{الصف 2} \quad x_1 + \frac{1}{16}s - u_3 + \frac{1}{5}u_4 = \frac{7}{8}$$

$$\text{الصف 3} \quad x_3 + \frac{3}{16}s - u_4 = \frac{5}{8}$$

ويحذف u_2 من العلاقة (7-38) نحصل على:

$$\left(\begin{array}{cc} 7\frac{1}{4} & \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} -\frac{10}{3}u_3 & \end{array} \right)u_3$$

$$\left(\begin{array}{cc} -\frac{16}{5}u_4 & \end{array} \right)u_4$$

الفصل

السابع

$$\left(\begin{array}{cc} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{6} \end{array} \right)s$$

والآن وعند الخطوة الثانية يمكن أن نتوقف دورات الحل ويكون الحل الأمثل هو:

$$x_1 = \frac{7}{8}, x_2 = \frac{5}{8}, x_3 = \frac{15}{8}, z = \frac{58}{8}$$

هذا ويمكن إجراء هذه العمليات وفق جدول أشار إليه بيل (Beale) والذي تتسب إليه الطريقة

التي تتبعنا خطواتها واحدة بعد الأخرى ويمكن مراجعة هذه الجدولة في المصادر المختصة حيث يضيّق المجال هنا التطرق إليها.

تمارين (7-1)

1- جد ما يأتي:

$$\min \quad z = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$

subject to:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 10$$

-2 إذا كانت لدينا دالة الهدف الآتية:

$$z = x_1^2 + x_2 + 2x_3^2$$

وكان القيد المفروض على هذه الدالة هو:

$$2x_1 - x_3 \leq 12$$

جد قيمة كل من (x_1, x_2, x_3) التي تعظم هذه الدالة.

-3 تعمل أحد المصانع وفق دالة التكاليف غير المقيدة الآتية:

$$z = 10 - 3x + 2x^3$$

فما هي قيمة (x) التي تؤدي إلى إقلال هذه الدالة. أستخدم أي من الطريقتين نيوتن-رافسن أو ريكولا-فالسلي.

-4 ما هي قيمة كل من (x_1, x_2, x_3) التي تعظم الدالة الآتية:

$$z = 8 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - x_3 - 3x_1 - 5x_2$$

أستخدم طريقة مصفوفة المشتقات في الحل.

-5 وضع جهاز تخطيط الإنتاج في أحد المشاريع دالة الإنتاج غير الخطية الآتية:

$$z = x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2 + x_1x_3$$

ووضع القيد الآتي على هذه الدالة:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16$$

والمطلوب إيجاد أعظم قيمة تبلغها (z) .

المصادر

- 1- Alexander Schrijver, (Theory of Linear and Integer Programming), 1998.
- 2- Ales Cerny (Mathematical Techniques in Finance) ,2009.
- 3- Angel de la Fuente ,(Mathematical Methods and Models for Economists) ,2000.
- 4- Adam Ostaszewski, (Mathematics in Economics), 1993.
- 5- Akira Takayama,(Mathematical Economics) , 1985.
- 6- Avriel, Mordecai, (Nonlinear Programming: Analysis and Methods) ,2003.
- 7- Bôcher, Maxime,(Introduction to higher algebra),2004.
- المصادر 8- Bernd Gärtner, Jiří Matoušek , (Understanding and Using Linear Programming,) 2006.
- 9- Bretscher, Otto ,(Linear Algebra with Applications (3rd ed.), Prentice Hall), 2005.
- 10- Bôcher, Maxime, (Introduction to higher algebra), 2004.
- 11- Baldani, James Bradfield, Robert Turner, (Mathematical Economics) , 2004.
- 12- Bazaraa, Mokhtar S. and Shetty, C. M. (Nonlinear programming. Theory and algorithms),1979.
- 13- Bretscher, Otto, (Linear Algebra with Applications (3rd ed.)), 2005.
- 14- Bertsekas, Dimitri P. (Nonlinear Programming: 2nd Edition), 1999.

- 15- Conrey, J. B.,(Ranks of elliptic curves and random matrix theory), 2007.
- 16- Christopher Clapham, James Nicholson, (The Concise Oxford Dictionary of Mathematics), 2005.
- 17- Cliff Huang, Philip S. Crooke, (Mathematics and Mathematica for Economists) ,1997.
- 18- Carl P. Simon, Lawrence Blume, (Mathematics for Economists) ,1994.
- 19- Morris C, Thanassoulis E ,(Essential Mathematics),1994.
- 20- Dimitri P. Bertsekas,(Nonlinear Programming: 2nd Edition),2004.
- 21- D. Zwillinger, (Handbook of Differential Equations ,3rd edition), 1997.
- 22- David Bailey ,(Mathematics in Economics) ,1998.
- 23- Dean Corbae, Maxwell B. Stinchcombe, Juraj Zeman ,(An Introduction to Mathematical Analysis for Economic), 2009.
- 24- Darrell A. Turkington (Mathematical Tools for Economics),2006.
- 25- E.L. Ince, (Ordinary Differential Equations), 1956 .
- 26- Edward T. Dowling, (Schaun's Outline of Introduction to Mathematical Economics) ,2000.
- 27- F. M. Wilkes, (Mathematics for Business) ,1999.
- 28- Godsil, Chris; Royle, Gordon,(Algebraic Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics), 2004.
- 29- Geoff Renshaw (Maths for Economics), 2008.
- 30- Ian Jacques.(Mathematics for Economics and Business, Fifth Edition/ Difference Equations.), 2006.

- 31- Ian Jacques, (Mathematics for Economics Plus Mathxl Pack) ,2009
- 32- Jeffrey Baldani, James Bradfield, Robert Turner, (Mathematical Economics) ,2004.
- 33- Jon Curwin, Roger Slater ,(Improve Your Maths: A Refresher Course), 1999.
- 34- Jean Soper.,(Mathematics for Economics and Business: An Interactive Introduction), 2004.
- 35- Kenneth S. Miller, (Linear difference equations.), 1968.
- 36- Ken Binmore, Joan Davies, (Calculus: Concepts and Methods), 2002.
- 37- Ken Holden, Alan Pearson, (Introductory Mathematics for Economics and Business) ,1992.
- 38- Knut Sydsaeter, Peter Hammond, (Essential Mathematics for Economic Analysis) ,2002.
- 39- Lang, Serge,(Algebra, Graduate Texts in Mathematics), 2002.
- 40- Larson, Ron, Bruce H. Edwards,(Calculus,9th ed.), 2009.
- 41- Leighton Thomas .,(Using Mathematics in Economics) , 1999.
- 42- Martin Grötschel,(Linear and Integer Programming) 2006.
- 43- Mark de Berg, Marc van Kreveld, and Others,(Linear Programming, Computational Geometry),2000.
- 44- Michael J. Todd, (The many facets of linear programming, Mathematical Programming) ,2002
- 45- McQuarrie, Donald A. ,(Mathematical Methods for Scientists and Engineers), 2003.

- 46- Martin Anthony, (Mathematics for Economics and Finance), 1996.
- 47- Michael W. Klein ,(Mathematical Methods for Economics), 2002.
- 48- . M.J. Rosser, (Basic Mathematics for Economists) ,2003.
- 49- Mik Wisniewski ,(Introductory Mathematical Methods in Economics) ,1996.
- 50- Mik Wisniewski, (Quantitative Methods for Decision Makers) ,2002.
- 51- Martin Grötschel,(Linear and Integer Programming) ,2006.
- 52- Mark de Berg, Marc van Kreveld, and Others,(Linear Programming, Computational Geometry)2000.
- 53- Malcolm Pemberton, Nicholas Rau .,(Mathematics for Economists) , 2006.
- 54- M.J. Rosser .,(Basic Mathematics for Economists) , 2003.
- 55- Nocedal, Jorge, , Stephen J., (Numerical Optimization (2nd ed.), 2006.
- 56- Paul M. Batchelder,(An introduction to linear difference equations), 1967.
- 57- Peter Kahn, (Studying Mathematics and Its Applications), 2001.
- 58- Peter Temple, (First Steps In Economic Indicators) ,2002.
- 59- Rangarajan K. Sundaram, (A First Course in Optimization Theory) ,1996.
- 60- Rebecca Taylor, Simon Hawkins, (Mathematics for Economics and Business), 2008.
- 61- Rowen, Louis Halle, (Graduate Algebra), 2008.

- 62- Stewart , James, (Calculus: Early Transcendentals,6th ed) ,2008.
- 63- Steve Greenlaw ,(Doing Economics) ,2005.
- 64- Sheldon M. Ross, (An Elementary Introduction to Mathematical Finance),2002.
- 65- Shayle R. Searle, Lois Schertz Willett, (Matrix Algebra for Applied Economics) ,2001.
- 66- Stinson, Douglas R. (Cryptography, Discrete Mathematics and Its Applications), 2005.
- 67- Thomas, George B., Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano (Calculus,11th ed),2008.
- 68- Teresa Bradley ,(Essential Mathematics for Economics and Business) ,2008.

المصادر

- 69- V. Chandru and M.R.Rao,(Linear Programming), 1999.
- 70- Wolfram, Stephen,(The Mathematical Book/5th ed),2003.
- 71- Zabrodin, Anton; Brezin, Édouard; Kazakov, Vladimir; Serban, Didina; Wiegmann, Paul,(Applications of Random Matrices in Physics),2006.

